

2

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琰 主审

Б.П.吉米多维奇

数学分析

习题集题解

第四版



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑 宋 涛 邱 蕾

封面设计 庞 婕 孙 佳

新版推荐

经典 B. П. 吉米多维奇数学习题集系列

数学分析习题集题解 (共六册)

1 分析引论

定价: 19.00元

2 单变量函数的微分学

定价: 19.00元

3 不定积分 定积分

定价: 20.00元

4 级数

定价: 19.00元

5 多变量函数的微分法 带参数的积分

定价: 22.00元

6 重积分和曲线积分

定价: 19.00元

数学分析习题集精选精解

定价: 39.00元

数学分析习题集——提示·解题思路·答案

定价: 39.00元

高等数学习题精选精解

定价: 39.80元

ISBN 978-7-5331-5899-6



9 787533 158996 >

定价: 19.00 元

2

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б.П.吉米多维奇
数学分析
习题集题解

第四版

图书在版编目 (CIP) 数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 2/费定晖,周学圣编演.—4版.—济南:山东科学技术出版社,2012
ISBN 978-7-5331-5899-6

I. ①吉... II. ①费... ②周... III. ①数学分析—高等学校—题解 IV. ①017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 120151 号

**Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解 2**

出版者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098088

网址: www.lkj.com.cn

电子邮件: sdkj@sdpress.com.cn

发行者: 山东科学技术出版社

地址: 济南市玉函路16号

邮编: 250002 电话: (0531) 82098071

印刷者: 山东新华印刷厂潍坊厂

地址: 潍坊市潍州路753号

邮编: 261031 电话: (0536) 2116806

开本: 787 mm × 1092mm 1/16

印张: 14

版次: 2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-5899-6

定价: 19.00 元

第四版前言

本书自 1979 年出版发行以来,历经 30 多个春秋,一直畅销不衰,深得读者厚爱。在郭大钧教授的帮助和指导下,对全书我不断地修订和补充,不断地修正错误,不断地替换更为简洁的解法和证明,力求本书一直保持其先进性、完整性和准确性,以求对读者的高度责任感。读者通过学习该书,对掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练,感到获益匪浅,赞誉其为学习数学分析“不可替代”之图书,对此我们倍感欣慰,鞭策我们为读者作出更多的奉献。

这次受山东科学技术出版社的约请,并得到郭大钧教授的大力支持,仍由我负责全书第四版的修订、增补和校阅工作,以适应文化建设繁荣发展的需要,更加激发全国广大读者的强烈求知欲。具体主要做了以下几方面的工作:

第一,为全书 4462 题中的近三成的习题,根据题型的不同,在原题解的前面,分别或给出提示,或给出解题思路,或给出证明思路。冀图启发读者怎样分析该题,怎样下手求解;启发读者怎样总结解题的规律;启发读者怎样正确使用有关的数学公式、概念和理论,开拓视野,活跃思路;帮助读者逐步解决学习中的困难,为他们在学习过程中提供一个良师益友。这是本次修订的主要工作。

第二,根据当前的语言习惯,对全书的文字作了较多的润色,使其表述更加准确,更加简洁凝练。

第三,改正了第三版中的个别印刷错误,修正了函数图像中的个别问题和个别习题的答案。

第四,根据国家相关标准,规范了有关术语和数学式子的表达;并对全书使用的外国人名,按照现在的标准或通用译法重新翻译人名,以求统一标准。

第五,对全书的版面和开本重新进行了调整,使其更富有时代的色彩。

我们殷切期望使用本书的读者,懂得只有通过个人的独立思考,加上勤学苦练才能取得成功,“只看不练假把式”,数学的学习是在个人的独立解题中逐步弄懂有关的概念、公式和理论的,我们编写本书,就是希望能

对数学分析课程的学习起到一个抛砖引玉的作用。读者使用本书最好不要先看题解,更不要查抄解答和答案,而是自己先对照教材中的有关概念、公式和理论独立进行思考,必要时可参照书中的提示、解题思路或证明思路独立完成解题,然后再查看书中是怎样解答的,比较自己的解答和书中解答的异同,从中找出差距,找出自己的问题所在,甚至找出书中解答的错误和不足之处,进而找到更为简洁的解答。只有这样才能提高自己的思维能力和创造才能,任何削弱独立思考的做法都是违背我们出版本书的初衷的。

山东科学技术出版社颜秀锦、宋德万、胡新蓉等老一代资深编辑为本书前三版的出版和发行付出了艰辛努力,责任编辑宋涛为本书第四版怎样提高质量倾注了不少心血,在此我们一并表示感谢。同时感谢山东大学、华东交通大学、山东师范大学等兄弟学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。虽然历经 30 余年的反复修订,面对如此庞大的图书,限于本人水平,书中难免有错误和不当之处,敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正,不胜感激,并在新版中改正。

费定晖

2012 年 5 月于南昌华东交通大学

出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,一元函数微分学,不定积分,定积分,级数,多元函数微分学,带参数的积分以及多重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答编辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有刘一鸣同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

1979 年于济南

目录

第二章 一元函数微分学	1
§ 1. 显函数的导数	1
§ 2. 反函数的导数. 用参数形式给出的函数的导数. 隐函数的导数	44
§ 3. 导数的几何意义	49
§ 4. 函数的微分	57
§ 5. 高阶的导数和微分	63
§ 6. 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理	89
§ 7. 增函数与减函数. 不等式	102
§ 8. 凹凸性. 拐点	114
§ 9. 不定式的求值法	121
§ 10. 泰勒公式	132
§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值	143
§ 12. 依据函数的特征点作函数图像	157
§ 13. 函数的极大值与极小值问题	193
§ 14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线	204
§ 15. 方程的近似解法	212

第二章 一元函数微分学

§ 1. 显函数的导数

1° 导数的定义 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[x, x_1]$ 上的增量. 表达式

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

若有意义, 则称为导数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图像在 x 点切线的斜率 $[\tan \alpha = f'(x)]$ (图 2.1).

2° 求导数的基本法则 若 c 为常数且函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$

都有导数, 则

$$(1) c' = 0;$$

$$(2) (cu)' = cu';$$

$$(3) (u + v - w)' = u' + v' - w'; \quad (4) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0); \quad (6) (u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \text{ 为常数});$$

$$(7) \text{ 若函数 } y = f(u) \text{ 及 } u = \varphi(x) \text{ 都有导数, 则 } y'_x = y'_u u'_x.$$

3° 基本公式 若 x 为自变量*, 则

$$\text{I. } (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \text{ 为常数});$$

$$\text{II. } (\sin x)' = \cos x;$$

$$\text{III. } (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\text{IV. } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{V. } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\text{VI. } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VII. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{VIII. } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{IX. } (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{X. } (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); \quad (e^x)' = e^x;$$

$$\text{XI. } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1); \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$\text{XII. } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$\text{XIII. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$\text{XV. } (\operatorname{coth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4° 单侧导数 表达式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导数和右导数.

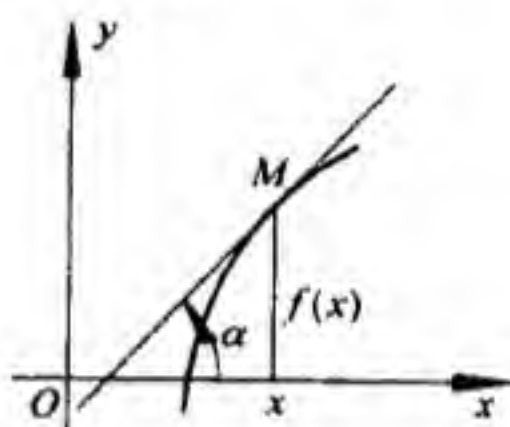


图 2.1

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中, 一些明显的定义域要求, 例如, 本节公式 V 中要求 $x \neq k\pi$ (k 为整数), VI 中要求 $|x| < 1$ 等等, 以及例如尔后 § 5 中相应的限制, 一般地就不再一一声明.

导数 $f'(x)$ 存在的充分必要条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5° 无穷导数 若函数 $f(x)$ 在点 x 连续, 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷导数. 在此种情形下, 函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

【821】 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\lg x$ 的相应增量 Δy .

解 $\Delta x = 1000 - 1 = 999$; $\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3$.

【822】 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 的相应增量 Δy .

解 $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009$; $\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000$.

【823】 设: (1) $y=ax+b$; (2) $y=ax^2+bx+c$; (3) $y=a^x$. 若变量 x 的增量为 Δx , 求增量 Δy .

解 (1) $\Delta y = [a(x+\Delta x)+b] - [ax+b] = a\Delta x$;

(2) $\Delta y = [a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c] - [ax^2 + bx + c] = (2ax+b)\Delta x + a(\Delta x)^2$;

(3) $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

【824】 证明: (1) $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x+\Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$.

提示 由增量的定义, 命题即获证.

证 (1) $\Delta[f(x)+g(x)] = [f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)] - [f(x)+g(x)]$
 $= [f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$,

于是, $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

(2) $\Delta[f(x)g(x)] = [f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)] - [f(x)g(x)]$
 $= [f(x+\Delta x) - f(x)]g(x+\Delta x) + [g(x+\Delta x) - g(x)]f(x)$
 $= \Delta f(x)g(x+\Delta x) + \Delta g(x)f(x)$,

于是, $\Delta[f(x)g(x)] = g(x+\Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$.

同样, 我们还可将 (2) 的结果写成 $\Delta[f(x)g(x)] = f(x+\Delta x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$.

【825】 过曲线 $y=x^2$ 上的二点 $A(2,4)$ 和 $A'(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ 引割线 AA' , 求此割线的斜率, 设:

(1) $\Delta x=1$; (2) $\Delta x=0.1$; (3) $\Delta x=0.01$; (4) Δx 为任意小量.

在该曲线上 A 点的切线的斜率等于什么?

解 割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$,

(1) $k_{AA'}=5$; (2) $k_{AA'}=4.1$; (3) $k_{AA'}=4.01$; (4) $k_{AA'}=4+\Delta x$.

于是, 在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

【826】 利用函数 $y=x^3$ 把 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1+h$ 映射到 Oy 轴上, 求其平均伸长系数. 设:

(1) $h=0.1$; (2) $h=0.01$; (3) $h=0.001$,

计算此系数的值. 当 $x=1$ 时伸长的系数等于什么?

解 平均伸长系数 $\bar{l} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$,

(1) $\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$;

(2) $\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$;

(3) $\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是, $\bar{l} \Big|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{l} = 3$.

【827】 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式给出

$$x = 10t + 5t^2,$$

式中 t 以 s(秒)计的时间, x 为以 m(米)计的距离. 求在 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设:

(1) $\Delta t = 1$; (2) $\Delta t = 0.1$; (3) $\Delta t = 0.01$,

计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于什么?

解 平均速度

$$\bar{v} = \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t = 210 + 5\Delta t \text{ (m/s)},$$

$$(1) \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215 \text{ (m/s)};$$

$$(2) \bar{v} = 210.5 \text{ (m/s)};$$

$$(3) \bar{v} = 210.05 \text{ (m/s)}.$$

于是, $v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210 \text{ (m/s)}.$

【828】 根据导数的定义, 直接求下列函数的导数:

$$(1) x^2; \quad (2) x^3; \quad (3) \frac{1}{x}; \quad (4) \sqrt{x}; \quad (5) \sqrt[3]{x};$$

$$(6) \tan x; \quad (7) \cot x; \quad (8) \arcsin x; \quad (9) \arccos x; \quad (10) \arctan x.$$

解 (1) $y = x^2$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$

$$(2) y = x^3,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$

$$(3) y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x(\Delta x + x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$

$$(4) y = \sqrt{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$

$$(5) y = \sqrt[3]{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x \neq 0).$

$$(6) y = \tan x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\tan(x + \Delta x) - \tan x}{\Delta x} = \frac{\frac{\tan x + \tan \Delta x}{1 - \tan x \tan \Delta x} - \tan x}{\Delta x} = \frac{\tan \Delta x (1 + \tan^2 x)}{\Delta x (1 - \tan x \tan \Delta x)} = \frac{\tan \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \tan x \tan \Delta x)}.$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\tan \Delta x \sec^2 x}{\Delta x (1 - \tan x \tan \Delta x)} = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

(7) $y = \cot x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cot(x+\Delta x) - \cot x}{\Delta x} = \frac{\frac{\cot x \cot \Delta x - 1}{\cot x + \cot \Delta x} - \cot x}{\Delta x} = \frac{-1 - \cot^2 x}{\Delta x (\cot x + \cot \Delta x)} = -\frac{\csc^2 x}{\Delta x (\cot x + \cot \Delta x)}.$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\csc^2 x}{\Delta x (\cot x + \cot \Delta x)} = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

(8) $y = \arcsin x$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} = \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \cdot \frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}, \end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$, 从而, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1),$

其中 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$.

(9) $y = \arccos x$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arccos(x+\Delta x) - \arccos x}{\Delta x} = \frac{\arcsin[(x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}) - (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2}]}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin t}{t} \cdot \frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}, \end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$, 从而, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$

(10) $y = \arctan x$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\arctan(x+\Delta x) - \arctan x}{\Delta x} = \frac{\arctan \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \frac{\arctan \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)}.$$

于是, $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\arctan \frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+\Delta x)} \right] = \frac{1}{1+x^2},$

其中利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\tan u} = 1$.

【829】 设 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, 求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

解 $f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$
 $= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9).$

于是, $f'(1) = -8$; $f'(2) = f'(3) = 0$.

【830】 设 $f(x) = x^2 \sin(x-2)$, 求 $f'(2)$.

解 $f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2)$. 于是, $f'(2) = 4$.

【831】 设 $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 求 $f'(1)$.

提示 从导数定义出发, 易得 $f'(1) = 1 + \frac{\pi}{4}$.

解 解法 1: 若用复合函数求导法, 可得

$$f'(x) = 1 + \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是, $f'(1) = 1 + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}$.

解法 2: 若按定义作, 注意到当 $x=1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}} \right) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

【832】 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微, 求 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

解 设 $\Delta x = x - a$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$. 于是, 得

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

【833】 证明: 若函数 $f(x)$ 可微及 n 为正整数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

反之, 若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在, 则可断定此函数有导数? 研究狄利克雷函数的例子(参阅第一章 734 题).

提示 由导数定义易证(1)式成立. 然其逆不成立, 可研究 734 题所示的狄利克雷函数 $\chi(x)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

$$\text{证 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]}{\frac{1}{n}} = f'(x).$$

反之, 就不一定对了. 例如, 对于狄利克雷函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在任一有理点是不连续的, 当然其导数也不存在. 但由于 $x + \frac{1}{n}$ 仍为有理数, 故当 x 为有理数时,

$$\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x) = 1 - 1 = 0,$$

从而, 极限(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\chi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \chi(x) \right] = 0$ 存在.

利用导数表, 求下列函数的导数:

【834】 $y = 2 + x - x^2$.

问 $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于什么?

解 由于 $y'(x) = 1 - 2x$, 故得

$$y'(0) = 1; \quad y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad y'(1) = -1; \quad y'(-10) = 21.$$

【835】 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. 当 x 为何值时:

(1) $y'(x) = 0$; (2) $y'(x) = -2$; (3) $y'(x) = 10$?

提示 先求出 $y'(x) = x^2 + x - 2$, 再利用所给条件解方程, 即得所要求的 x 值.

解 $y'(x) = x^2 + x - 2$.

(1) 令 $y'(x) = 0$, 得 $x^2 + x - 2 = 0$. 于是, $x = -2$ 或 $x = 1$;

(2) 令 $y'(x) = -2$, 得 $x^2 + x = 0$. 于是, $x = -1$ 或 $x = 0$;

(3) 令 $y'(x) = 10$, 得 $x^2 + x - 12 = 0$. 于是, $x = -4$ 或 $x = 3$.

【836】 $y = a^3 + 5a^3x^2 - x^3$.

解 $y' = 10a^3x - 3x^2$.

【837】 $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

解 $y' = \frac{a}{a+b}$.

【838】 $y = (x-a)(x-b)$.

解 $y' = x - a + x - b = 2x - a - b$.

【839】 $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

解 $y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3 + 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$
 $= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)]$
 $= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2 + 11x + 9)$.

【840】 $y = (x\sin a + \cos a)(x\cos a - \sin a)$.

解 $y' = \sin a(x\cos a - \sin a) + \cos a(x\sin a + \cos a) = x\sin 2a + \cos 2a$.

【841】 $y = (1+nx^m)(1+mx^n)$.

解 $y' = mn x^{m-1}(1+mx^n) + mn x^{n-1}(1+nx^m) = mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$.

【842】 $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解 $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 - 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3 - 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$
 $= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$
 $= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x+7x^2)(1+x+x^2)^2$.

【843】 $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) \quad (x \neq 0)$.

【844】 证明: 公式 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

提示 利用商的求导法则及行列式的定义.

证 $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$. 这里已暗设 $cx+d \neq 0$.

求下列函数的导数:

【845】 $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \quad (|x| \neq 1)$.

【846】 $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

解 由于 $y = \frac{2}{1-x+x^2} - 1$, 故 $y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

【847】 $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

解 $y' = \frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1+x)^2(1-x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6} = \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4} \quad (|x| \neq 1).$

【848】 $y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

解 $y' = \frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3) - 3x^2(2-x^2)] + 2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$
 $= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} \quad (x \neq 1).$

【849】 $y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

解 $y' = \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}} = -\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q) + (p-q)x]}{(1+x)^{q+1}} \quad (x \neq -1).$

【850】 $y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

解 $y' = \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$
 $= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}[p - (q+1)x - (p+q-1)x^2]}{(1+x)^2} \quad (x \neq -1).$

【851】 $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

解 $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0).$

【852】 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right) \quad (x > 0).$

【853】 $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

解 $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x > 0).$

【854】 $y = x\sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$

【855】 $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$.

解 $y' = \sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\left[\frac{x\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{x^2\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}\right] = \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$
 $(x \neq \sqrt[3]{-3}).$

【856】 $y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

解 $y' = \frac{-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + n(1+x)^{n-1}(1-x)^m}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}} = \frac{(n-m) - (n+m)x}{(m+n)\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}} \quad (|x| \neq 1).$

【857】 $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解 $y' = \frac{\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} \quad (|x| < |a|).$

【858】 $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$

解 $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} \cdot \frac{3x^2(1-x^3)+3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2} = \frac{2x^2}{1-x^6} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \quad (|x| \neq 1).$

【859】 $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}.$

解 $y' = -\frac{1}{(1+x^2)(x+\sqrt{1+x^2})^2} \left[\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 2x \right] = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

【860】 $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] = \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \quad (x>0).$

【861】 $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}.$

解 $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}})^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt{x})^2}\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt{x}})^2}} \quad (x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8).$

【862】 $y = \cos 2x - 2\sin x.$

解 $y' = -2\sin 2x - 2\cos x = -2\cos x(1+2\sin x).$

【863】 $y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x.$

解 $y' = -2x\cos x - (2-x^2)\sin x + 2\sin x + 2x\cos x = x^2\sin x.$

【864】 $y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x).$

解 $y' = -2\sin x \cos x \cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) - 2\sin x \cos x \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x)$
 $= -\sin 2x [\cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x)]$
 $= -\sin 2x \cos(\cos^2 x - \sin^2 x)$
 $= -\sin 2x \cos(\cos 2x).$

【865】 $y = \sin^n x \cos nx.$

解 $y' = n\sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n\sin^n x \sin nx = n\sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) = n\sin^{n-1} x \cos(n+1)x.$

【866】 $y = \sin[\sin(\sin x)].$

解 $y' = \cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)].$

【867】 $y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$

解 $y' = \frac{2\sin x(\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^4 x^2} \quad (x^2 \neq k\pi; k=1, 2, \dots).$

【868】 $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}.$

解 $y' = \frac{-2\sin^3 x - 4\sin x \cos^2 x}{4\sin^4 x} = -\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x} \quad (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

【869】 $y = \frac{1}{\cos^n x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\cos^{2n} x} (-n\cos^{n-1} x \sin x) = \frac{n\sin x}{\cos^{n+1} x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$

【870】 $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}.$

解 $y' = \frac{1}{(\cos x + x \sin x)^2} [(x \sin x - \cos x + \cos x)(\cos x + x \sin x) - (\sin x - \sin x + x \cos x)(\sin x - x \cos x)]$

$$= \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}.$$

【871】 $y = \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \csc^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

【872】 $y = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x.$

解 $y' = \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \tan^4 x \sec^2 x = 1 + \tan^6 x \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

【873】 $y = 4 \sqrt[3]{\cot^2 x} + \sqrt[3]{\cot^8 x}.$

解 $y' = \frac{8}{3} (\cot x)^{-\frac{1}{3}} (-\csc^2 x) + \frac{8}{3} (\cot x)^{\frac{5}{3}} (-\csc^2 x) = -\frac{8}{3 \sin^4 x \sqrt[3]{\cot x}}$

$$(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【874】 $y = \sec^2 \frac{x}{a} + \csc^2 \frac{x}{a}.$

解 $y' = \frac{2}{a} \sec^2 \frac{x}{a} \tan \frac{x}{a} - \frac{2}{a} \csc^2 \frac{x}{a} \cot \frac{x}{a} = \frac{2}{a} \left(\frac{\sin \frac{x}{a}}{\cos^3 \frac{x}{a}} - \frac{\cos \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a}} \right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{a} - \cos^4 \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a}}$

$$= \frac{16 \left(\sin^2 \frac{x}{a} - \cos^2 \frac{x}{a} \right)}{a \left(2 \sin \frac{x}{a} \cos \frac{x}{a} \right)^3} = \frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}} \quad (x \neq \frac{k\pi a}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【875】 $y = \sin[\cos^2(\tan^3 x)].$

解 $y' = \cos[\cos^2(\tan^3 x)] [-2\cos(\tan^3 x) \sin(\tan^3 x)] [3\tan^2 x \sec^2 x]$

$$= -3\tan^2 x \sec^2 x \cdot \sin(2\tan^3 x) \cdot \cos[\cos^2(\tan^3 x)] \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

【876】 $y = e^{-x^2}.$

解 $y' = -2xe^{-x^2}.$

【877】 $y = 2^{\tan \frac{1}{x}}.$

解 $y' = -\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot 2^{\tan \frac{1}{x}} \ln 2 \quad (x \neq 0).$

【878】 $y = e^x (x^2 - 2x + 2).$

解 $y' = e^x (x^2 - 2x + 2) + e^x (2x - 2) = x^2 e^x.$

【879】 $y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}.$

解 $y' = -e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] + e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \cos x - x \sin x + \frac{(1+x)^2}{2} \sin x - (1+x) \cos x \right]$

$$= x^2 e^{-x} \sin x.$$

【880】 $y = e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right).$

解 $y' = e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} e^x \csc^2 \frac{x}{2} = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi; k \text{ 为整数}).$

【881】 $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}.$

解 $y' = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \cos x - \sin x) - 3^x \ln 3 (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)}{3^{2x}} = -\frac{(1 + \ln^2 3) \sin x}{3^x}.$

【882】 $y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} [a(a \sin bx - b \cos bx) + (ab \cos bx + b^2 \sin bx)] = \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx.$

【883】 $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$

解 $y' = e^x [1 + e^{e^x} (1 + e^{e^{e^x}})].$

【884】 $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$

提示 两边取对数后,同时对 x 求导数.

解 两边取对数,得

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a).$$

两边同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

于是, $y' = y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \quad (x > 0).$

【885】 $y = x^{a^x} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$

解 $y' = a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} a^{a^x} \ln a + a^x \cdot a^{a^x} \ln^2 a.$

【886】 $y = \lg^3 x^2.$

解 $y' = 3 \lg^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2} 2x \lg e = \frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2 \quad (x \neq 0).$

或按 $y = (\lg e \cdot \ln x^2)^3 = 8 \lg^3 e \cdot \ln^3 |x|$ 求导数,有 $y' = 24 \lg^3 e \cdot \left(\frac{1}{x} \ln^2 |x|\right)^{\cdot 1} \quad (x \neq 0).$

*) $(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x},$ 以后不再说明.

【887】 $y = \ln[\ln(\ln x)].$

解 $y' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \quad (x > e).$

【888】 $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)].$

解 $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)} \quad (x > e).$

【889】 $y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} \quad (x > -1).$

【890】 $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

解 $y' = \frac{1}{4} [\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)]' = \frac{1}{4} \left[\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} \right] = \frac{x}{x^4-1} \quad (|x| > 1).$

【891】 $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}.$

解 $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \ln |x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^4),$

$$y' = -\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3 = \frac{1}{x(1+x^4)^2} \quad (x \neq 0).$$

【892】 $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

解 $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} [\ln |x\sqrt{3} - \sqrt{2}| - \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{2}|]$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{3x^2 - 2} \quad (|x| > \sqrt{\frac{2}{3}}).$

【893】⁺ $y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \quad (0 < k < 1).$

解 $y' = \frac{1}{1-k} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \right) = \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} \quad (|x| < 1).$

【894】 $y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}).$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{x+1})} \quad (x > -1).$

【895】 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$

解 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$

【896】 $y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}.$

解 $y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$

*) 利用 895 题的结果,下同,不再说明.

【897】 $y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x.$

解 $y' = \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- 2\sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2$
 $= \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}).$

【898】 $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$

解 $y' = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2}.$

【899】 $y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0).$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \right) = \frac{1}{a - bx^2} \quad (|x| < \sqrt{\frac{a}{b}}).$

【900】 $y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$

解 $y' = \frac{6x^5 - 4x^3(2+3x^2)}{x^8} \sqrt{1-x^2} - \frac{x(2+3x^2)}{x^4 \sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{1+\sqrt{1-x^2}} \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) - \frac{3}{x}$
 $= -\frac{8}{x^5 \sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$

【901】 $y = \ln \tan \frac{x}{2}.$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明,中译本基本是按俄文第二版翻译的.俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

解 $y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).$

【902】 $y = \ln \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$

解 $y' = \frac{1}{\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \cdot \sec^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}$
 $= \frac{1}{\cos x} \quad (|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$

【903】⁺ $y = \frac{1}{2} \cot^2 x + \ln \sin x.$

解 $y' = -\cot x \cdot \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin x} = -\cot^3 x \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).$

【904】 $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) = -\frac{1}{\cos x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$

【905】 $y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$

解 $y' = \frac{\sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x}{2 \sin^4 x} + \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).$

【906】 $y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} \quad (0 \leq |a| < |b|).$

解 当 $a=0$ 时, $y = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$. 由于 $1 + \sin x$ 非负, 为使对数有意义, 必须有

$$\begin{cases} 1 + \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

当 $(2k - \frac{1}{2})\pi < x < (2k + \frac{1}{2})\pi$ (k 为整数) 时, 上述不等式成立. 在此区域内, 得

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

当 $a \neq 0$ 时, 记 $y = \ln u(x)$, 而

$$u(x) = \frac{1 + \frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \sin x}{\frac{a}{b} + \cos x} = \frac{1 + \cos \varphi_0 \cos x + \sin \varphi_0 \sin x}{\cos \varphi_0 + \cos x} = \frac{1 + \cos(x - \varphi_0)}{\cos x + \cos \varphi_0} = \frac{v_1(x)}{v_2(x)},$$

其中 $\varphi_0 = \arctan \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x) \geq 0$. 为保证 y 可导, 首先必须有 $u(x) > 0$, 故应有 $v_1(x) \neq 0$ (从而, $v_1(x) > 0$), 进而应有 $v_2(x) > 0$. 于是, y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切 x 值, 记成 $R = \{x | v_1(x) \neq 0, v_2(x) > 0\}$, 则

$$R = \{x | \cos x + \cos \varphi_0 > 0 \text{ 且 } x \neq (2k+1)\pi + \varphi_0; k \text{ 为整数}\}.$$

在此区域内, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin(x - \varphi_0)}{1 + \cos(x - \varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} = \frac{-\sin x \cos \varphi_0 + \cos x \sin \varphi_0}{1 + \cos x \cos \varphi_0 + \sin x \sin \varphi_0} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\frac{a}{b} \sin x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \cos x}{1 + \frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos x}, \end{aligned}$$

其实此结果也包含了 $a=0$ 时的情形.

【907】 $y = \frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6).$

解 $y' = -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right) = -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).$

【908】 $y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$

解 $y' = -\frac{1}{x^5} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5} = \frac{1}{x^5} \ln x \quad (x > 0).$

【909】⁺ $y = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2}).$

解 $y' = \frac{3}{2} \cdot 2(1 - \sqrt[3]{1+x^2}) \left[-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \right] + \frac{3}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} = \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}}.$

【910】 $y = \ln \left[\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right) \right].$

解 $y' = \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x} \right)} \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \right]$
 $= -\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x}}{\left(1+x\ln \frac{1}{x}\right) \left[1+x\ln \left(\frac{1}{x}+\ln \frac{1}{x}\right)\right]} \quad (x > 0).$

【911】 $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)].$

解 $y' = [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + x \left[\frac{1}{x} \cos(\ln x) + \frac{1}{x} \sin(\ln x) \right] = 2\sin(\ln x) \quad (x > 0).$

【912】⁺ $y = \ln \tan \frac{x}{2} - \cos x \ln \tan x.$

解 $y' = \frac{1}{\tan \frac{x}{2}} \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \ln \tan x - \cos x \frac{1}{\tan x} \sec^2 x = \sin x \ln \tan x$

$(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$

【913】 $y = \arcsin \frac{x}{2}.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (|x| < 2).$

【914】 $y = \arccos \frac{1-x}{\sqrt{2}}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2}).$

【915】 $y = \arctan \frac{x^2}{a}.$

解 $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2 + x^4} \quad (a \neq 0).$

【916】 $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{2}}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2 + 2} \quad (x \neq 0).$

【917】 $y = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}.$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geq 0).$

【918】 $y = x + \sqrt{1-x^2} \arccos x.$

解 $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \quad (|x| < 1).$

【919】 $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}.$

提示 利用基本公式及求导法则,求得 $y' = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ 的过程中,读者可能认为其存在域仅为 $x > 0$,

但是,可以证明:在点 $x=0$ 处的右导数 $y'_+(0)=0$,它等于 $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ 在点 $x=0$ 处的值.因此, y' 的存在域为 $x \geq 0$.以后碰到类似情况,均作这样的理解,不再一一说明.

解 $y' = \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 $= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0).$

【920】 $y = \arccos \frac{1}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1).$

【921】 $y = \arcsin(\sin x).$

提示 注意将所得结果化简,得

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \operatorname{sgn}(\cos x) \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

解 $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x) \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$

【922】 $y = \arccos(\cos^2 x).$

提示 注意将所得结果化简,得

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{2\sin x \cos x}{|\sin x| \sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

解 $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1+\cos^2 x)}} = \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi; k \text{ 为整数}).$

【923】 $y = \arcsin(\sin x - \cos x).$

解 $y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}} \quad (0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$

【924】 $y = \arccos \sqrt{1-x^2}.$

提示 注意将所得结果化简,得

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{|x| \sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

解 $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$

【925】 $y = \arctan \frac{1+x}{1-x}$.

解 $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 1)$.

【926】 $y = \operatorname{arccot} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)$.

解 $y' = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)^2} \cdot \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = 1$

$(x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数}).$

【927】 $y = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) \quad (a > b \geq 0)$.

解 $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \tan^2 \frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{a + b \cos x}$.

【928】 $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2} \quad (x \neq 0)$.

【929】 $y = \frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

解 $y' = -\frac{2}{\arccos^3(x^2)} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{4x}{\sqrt{1-x^4} \arccos^3(x^2)} \quad (|x| < 1)$.

【930】 $y = \arctan x + \frac{1}{3} \arctan(x^3)$.

解 $y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^6} = \frac{1+x^4}{1+x^6}$.

【931】 $y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x \arctan(\sin x)$.

解 $y' = \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - 2 \cos x \cdot \arctan(\sin x) - \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} = -2 \cos x \cdot \arctan(\sin x)$.

【932】 $y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.

解 $y' = \frac{1}{\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1)$.

【933】 $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \arctan \frac{x}{b}$.

解 $y' = \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)} = \frac{a^2+b^2}{(x+a)(b^2+x^2)} \quad (x > -a)$.

【934】 $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0)$.

解 $y' = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}$.

【935】 $y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1+x^3} \quad (x \neq -1).$$

$$\text{【936】 } y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2-1)-2x^2\sqrt{2}}{(x^2-1)^2} \\ = \frac{1}{1+x^4} \quad (|x| \neq 1).$$

$$\text{【937】 } y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x.$$

$$\text{解 } y' = (\arcsin x)^2 + \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 2 = (\arcsin x)^2 \quad (|x| < 1).$$

$$\text{【938】 } y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-\sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{\arccos x}{x^2} \quad (0 < |x| < 1).$$

$$\text{【939】 } y = \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1+(x^2-1)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} + \frac{x \ln x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1).$$

$$\text{【940】 } y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) = \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).$$

$$\text{【941】 } y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{12} \left(\frac{4x^3-2x}{x^4-x^2+1} - \frac{4x}{x^2+1} \right) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}\right)^2} \cdot \left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2-1)^2} \right] = \frac{x^3}{1+x^6} \quad (|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

$$\text{【942】 } y = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arccot} x^6.$$

$$\text{解 } y' = \frac{6x^5(1+x^{12})-12x^{17}}{(1+x^{12})^2} + \frac{6x^5}{1+x^{12}} = \frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}.$$

$$\text{【943】}^+ y = \ln \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3} \arctan \frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{解 } y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})} - \frac{1}{2(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{x^2}} \\ = -\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x}} \quad (-\infty < x < 1, x \neq 0).$$

$$\text{【944】 } y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

【945】 $y = \operatorname{arccot} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a>0).$

解 $y' = -\frac{1}{1+\frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{ax-x^2} - \frac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2} = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0<x<a).$

【946】 $y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

解 $y' = -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x-x^2} - \frac{3-x}{2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$
 $(|x+1|<\sqrt{2}).$

【947】 $y = \frac{1}{4}\ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\arctan \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

解 $y' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}+x} \left[1 + \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^4)^3}} \right] - \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} \left[\frac{x^3}{\sqrt{(1+x^4)^3}} - 1 \right] \right\}$
 $- \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x^2} \left[\frac{x^4}{\sqrt{(1+x^4)^3}} - \sqrt[4]{1+x^4} \right]$
 $= \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad (x \neq 0).$

【948】 $y = \arctan(\tan^2 x).$

解 $y' = \frac{1}{1+\tan^4 x} \cdot 2\tan x \sec^2 x = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$

【949】 $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$

解 $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$
 $+ \frac{1}{2} \left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} \right] - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (0<|x|<1).$

【950】 $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\arctan x)^2.$

解 $y' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \arctan x = \frac{x^2}{1+x^2} \arctan x.$

【951】 $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$

解 $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$

【952】 $y = \arctan(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 $y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{2(1+x^2)}.$

【953】 $y = \arcsin \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right).$

提示 注意将所得结果化简,得

$$\frac{1 - \cos a \cos x}{\sqrt{(\cos x - \cos a)^2}} \cdot \frac{\sin a \cdot (\cos x - \cos a)}{(1 - \cos a \cos x)^2} = \frac{\sin a \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1 - \cos a \cos x} \quad (\cos x \neq \cos a).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)^2}} \cdot \frac{\sin a \cos x (1 - \cos a \cos x) - \sin a \cos a \sin^2 x}{(1 - \cos a \cos x)^2} \\ &= \frac{1 - \cos a \cos x}{\sqrt{(\cos x - \cos a)^2}} \cdot \frac{\sin a \cdot (\cos x - \cos a)}{(1 - \cos a \cos x)^2} = \frac{\sin a \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \cos a)}{1 - \cos a \cos x} \end{aligned}$$

($\cos x \neq \cos a$, 即 $x \neq a + 2k\pi, k$ 为整数).

$$\text{【954】 } y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{3} \right) - \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \sqrt{3} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2+2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{x^2} \\ &= \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}} \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

$$\text{【955】 } y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{1+x^4}} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} \\ &\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} - \sqrt{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1). \end{aligned}$$

$$\text{【956】 } y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arccot} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left[\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) (1+x^2) - 2x^2 \sqrt{1-x^2} \right] \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2} \right)} \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\ &= \frac{4}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$\text{【957】}^+ y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$\text{解 } y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\sin x^2 - \cos x^2)^2}} \cdot 2x(\cos x^2 + \sin x^2) = -\frac{2x(\sin x^2 + \cos x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$$

$$(0 < |x| < \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}, k = 0, 1, 2, \dots).$$

$$\text{【958】 } y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2).$$

$$\text{解 } y' = \frac{2x\cos(x^2)}{\sqrt{1-\sin^2(x^2)}} + \frac{2x\sin(x^2)}{\sqrt{1-\cos^2(x^2)}} = 2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2) + \operatorname{sgn}(\sin x^2)]$$

$$(|x| \neq \sqrt{\frac{k\pi}{2}}; k=0,1,2,\dots).$$

【959】 $y = e^{\arcsin x} [\cos(\arcsin x) + \sin(\arcsin x)].$

解

$$\begin{aligned} y' &= e^{\arcsin x} \left\{ \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} [\cos(\arcsin x) + \sin(\arcsin x)] + \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} [\cos(\arcsin x) - \sin(\arcsin x)] \right\} \\ &= \frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \cos(\arcsin x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

【960】 $y = \arctan e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}.$

解 $y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \right) = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}.$

【961】 $y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x > 0).$

解 $y' = 1 + x^x(1+\ln x) + x^{x^x}(x^x \ln x)' = 1 + x^x(1+\ln x) + x^x \cdot x^{x^x} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right).$

【962】 $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (a > 0, x > 0).$

解 $y' = x^{x^a} \left(ax^{a-1} \ln x + \frac{x^a}{x} \right) + x^{a^x} \left(a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x} \right) + a^{x^x} \cdot \ln a \cdot x^x (1 + \ln x)$
 $= x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) + x^x a^{x^x} \ln a (1 + \ln x).$

【963】 $y = \sqrt{x} \quad (x > 0).$

提示 注意当 $x > 0$ 时, $y = \sqrt{x} = e^{\frac{1}{2} \ln x}.$

解 $y' = (e^{\frac{1}{2} \ln x})' = x^{\frac{1}{2}-2} (1 - \ln x).$

【964】 $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$

解题思路 分别对幂指函数 $(\sin x)^{\cos x}$ 及 $(\cos x)^{\sin x}$ 采用 884 题所示的方法, 然后化简, 其结果为 $(\sin x)^{\cos x+1} [\cot^2 x - \ln(\sin x)] - (\cos x)^{\sin x+1} [\tan^2 x - \ln(\cos x)] (0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$

解 $y' = (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] + (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right]$
 $= (\sin x)^{\cos x+1} [\cot^2 x - \ln(\sin x)] - (\cos x)^{\sin x+1} [\tan^2 x - \ln(\cos x)] \quad (0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$

【965】⁺ $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$

提示 注意当 $x > 1$ 时, $(\ln x)^x : x^{\ln x} = \frac{e^{x \ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}} = e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x}.$

解 $y = \frac{e^{x \ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}} = e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x}.$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \{ [x \ln(\ln x)]' - (\ln^2 x)' \} = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left\{ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right\} \\ &= \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}} \{ x \ln x \ln(\ln x) + x - 2 \ln^2 x \} \quad (x > 1). \end{aligned}$$

【966】 $y = \lg_e e.$

解 由 $y = \lg_e e$ 推得 $y = \frac{1}{\ln x}$. 于是, $y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{x} (\lg_e e)^2 \quad (x > 0, x \neq 1).$

【967】 $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x}.$

解 $y' = \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} = \operatorname{th}^3 x.$

【968】 $y = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\coth \frac{x}{2}\right).$

解 $y' = \frac{\operatorname{sh}^3 x - 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^4 x} + \frac{1}{2\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} \cdot \coth \frac{x}{2}} = -\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x} \quad (x > 0).$

【969】 $y = \arctan(\operatorname{th} x).$

解 $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} 2x}.$

【970】 $y = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \left(-\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\right) = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x} \quad (x \neq 0).$

【971】 $y = \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th} \frac{x}{2}\right) \quad (0 \leq |b| < a).$

解 $y' = \frac{b}{a} + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a(b + a\operatorname{ch} x)} = \frac{a + b\operatorname{ch} x}{b + a\operatorname{ch} x}.$

【972】 引入中间变量 $u = \cos^2 x$ 求函数 $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$ 的导数.

解 $u = \cos^2 x, \quad y = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}), \quad y'_x = y'_u u'_x, \quad \text{而}$

$$y'_u = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}, \quad u'_x = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$$

于是, $y'_x = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$

利用 972 题所示的方法, 求下列函数的导数:

【973】⁺ $y = (\arccos x)^2 \left[\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2} \right].$

提示 令 $u = \arccos x.$

解 设 $u = \arccos x$, 则 $y = u^2 \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right)$. 由于

$$y'_u = 2u \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right) + u^2 \left(\frac{2\ln u}{u} - \frac{1}{u} \right) = 2u \ln^2 u = 2\arccos x \cdot \ln^2(\arccos x),$$

$$u'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

于是, $y'_x = y'_u u'_x = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arccos x \cdot \ln^2(\arccos x) \quad (|x| < 1).$

【974】⁺ $y = \frac{1}{2} \arctan(\sqrt[4]{1 + x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + 1}{\sqrt[4]{1 + x^4} - 1}.$

提示 令 $u = \sqrt[4]{1 + x^4}.$

解 设 $u = \sqrt[4]{1 + x^4}$, 则 $y = \frac{1}{2} \arctan u + \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1}$. 由于

$$y'_u = \frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) = \frac{1}{1-u^4} = -\frac{1}{x^4}, \quad u'_x = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$

于是, $y'_x = y'_u u'_x = -\frac{1}{x \sqrt[4]{(1+x^4)^3}} \quad (x \neq 0).$

【975】 $y = \frac{e^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1 - e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1 - e^{-2x^2}).$

提示 令 $u=e^{-x^2}$.

解 设 $u=e^{-x^2}$, 则 $y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2)$. 由于

$$y'_u = \frac{\left(\arcsin u + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2} + \frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2} - \frac{u}{1-u^2} = \frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x = -2xe^{-x^2},$$

于是, $y'_x = y'_u u'_x = \frac{-2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}} \quad (x \neq 0)$.

【976】 $y = \frac{a^x}{1+a^{2x}} - \frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}} \operatorname{arccot}(a^{-x})$.

提示 令 $u=a^x$.

解 设 $u=a^x$, 则 $y = \frac{u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} \operatorname{arccot}(u^{-1})$. 由于

$$y'_u = \frac{(1+u^2)-2u^2}{(1+u^2)^2} - \frac{-2u(1+u^2)-2u(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \cdot \operatorname{arccot}(u^{-1}) - \frac{1-u^2}{1+u^2} \cdot \frac{1}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}$$

$$= \frac{4u\operatorname{arccot}(u^{-1})}{(1+u^2)^2} = \frac{4a^x \cdot \operatorname{arccot}(a^{-x})}{(1+a^{2x})^2},$$

$$u'_x = a^x \ln a,$$

于是, $y'_x = y'_u u'_x = \frac{4a^{2x} \ln a}{(1+a^{2x})^2} \operatorname{arccot}(a^{-x}) \quad (a > 0)$.

【977】 求函数的导数并作函数及其导数的图像, 设:

(1) $y=|x|$; (2) $y=x|x|$; (3) $y=\ln|x|$.

提示 (1) $y' = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 或记成 $y' = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0)$.

以下各题均可利用此结果, 不再说明.

(2) 注意在分界点 $x=0$ 处, 有 $y'|_{x=0}=0$, 从而有 $y'=2|x|$.

(3) $y' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$.

解 (1) $y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ (图 2.2)

$$y' = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

或写成 $y' = \frac{|x|}{x} \quad (x \neq 0)$. 在 $x=0$ 时 y' 不存在. (图 2.3)

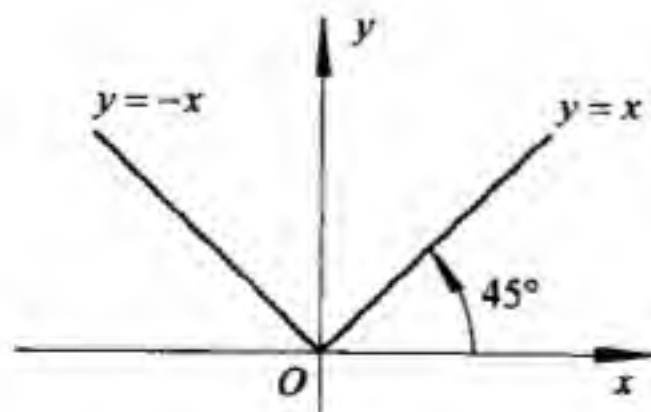


图 2.2

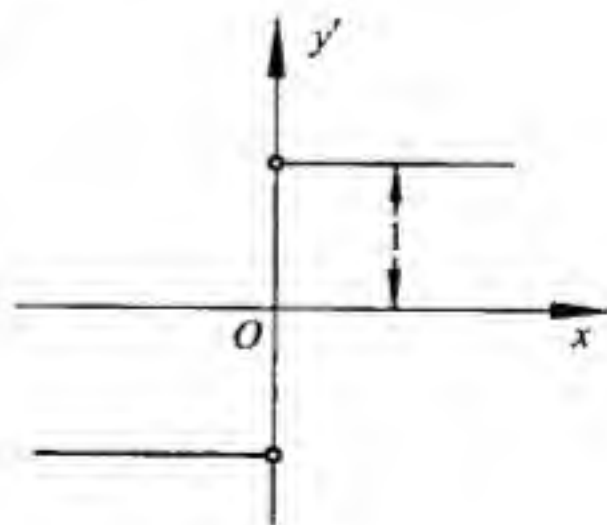


图 2.3

$$(2) y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases} \quad (\text{图 2.4})$$

$$y' = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases} \quad \text{而且易见有 } y'|_{x=0} = 0, \text{ 故 } y' = 2|x|. \quad (\text{图 2.5})$$

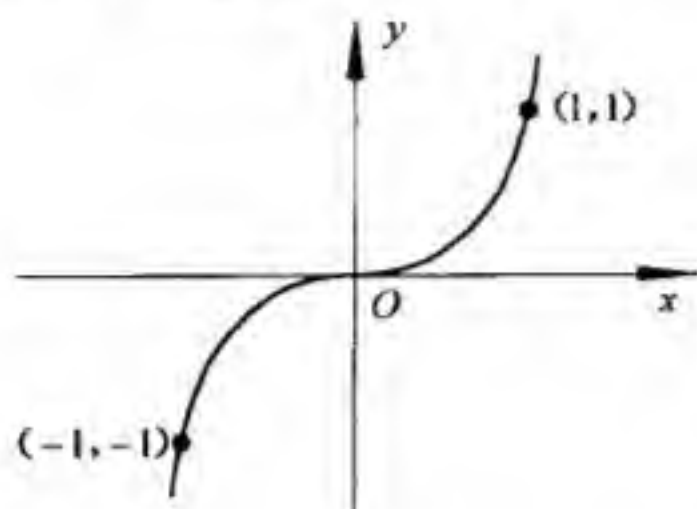


图 2.4

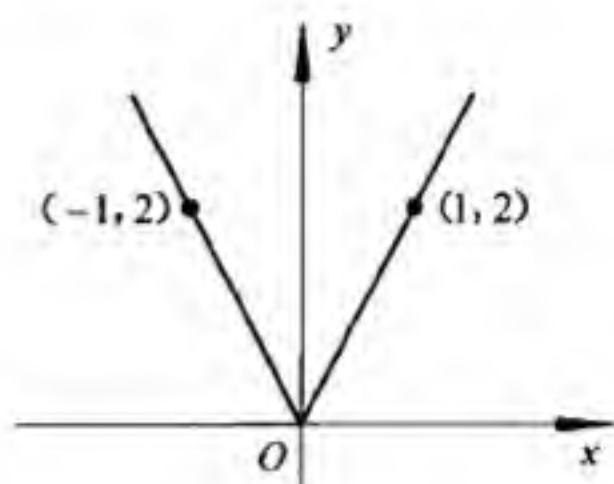


图 2.5

*) 以下各题, 对于分界点的导数, 不再单独讨论.

$$(3) y = \ln|x|, \quad (\text{图 2.6})$$

$$y' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0). \quad (\text{图 2.7})$$

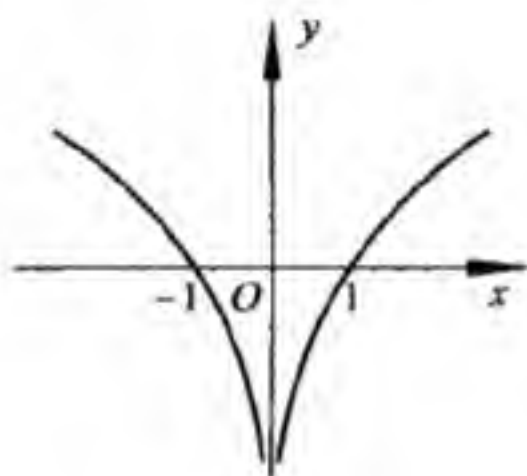


图 2.6

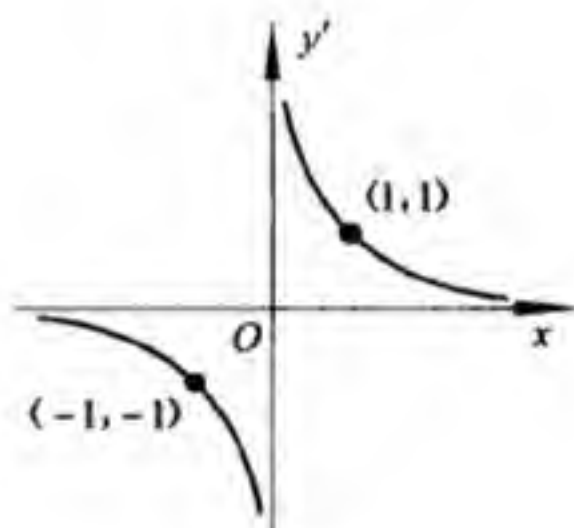


图 2.7

【978】 求下列函数的导数:

$$(1) y = |(x-1)^2(x+1)^3|; \quad (2) y = |\sin^3 x|; \quad (3) y = \arccos \frac{1}{|x|}; \quad (4) y = [x] \sin^2 \pi x.$$

提示 (1) 利用 977 题(1)的结果, 有 $y' = (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$ ($|x| \neq 1$). (2) 仿(1). (3) 仿(1). (4) 对于 $y = [x]$ 有 $y' = 0$ ($x \neq k; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 利用此结果, 可知当 $x \neq k$ 时, 有

$$([x] \sin^2 \pi x)' = \pi [x] \sin 2\pi x,$$

易证当 $x = k$ 时, 上式也成立.

$$\text{解 } (1) y' = \frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^2} [2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2]$$

$$= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1) \quad (|x| \neq 1);$$

$$(2) y' = \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3\sin^2 x \cos x = \frac{3}{2} \sin 2x |\sin x| \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$$

$$(3) y' = \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \right] \left[-\left(\frac{|x|}{x \cdot x^2} \right) \right] = \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$$

(4) 对于 $y = [x]$ 有 $y' = 0$ ($x \neq k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 于是, 当 $x \neq k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 有

$$([x] \sin^2 \pi x)' = 2\pi \sin \pi x \cos \pi x \cdot [x] = \pi [x] \sin 2\pi x.$$

容易直接验证当 $x = k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时上式也成立.

求下列函数的导数并作出函数及其导数的图像:

$$\text{【979】 } y = \begin{cases} 1-x, & -\infty < x < 1, \\ (1-x)(2-x), & 1 \leq x \leq 2, \\ -(2-x), & 2 < x < +\infty. \end{cases} \quad (\text{图 2.8})$$

解题思路 注意必须求函数 y 在其分段(界)点 $x=1$ 及 $x=2$ 处的左、右导数,若左、右导数存在而且相等,则函数在该点可导,否则函数在该点不可导.从而确定该点是否在导数 y' 的定义域内.

以下的 980 到 983 题中均需这样考虑问题,否则会产生错误.

$$\text{解 显然 } y' = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1, \\ 2x-3, & 1 < x < 2, \\ 1, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

当 $x=1$ 时,右导数 $y'_+|_{x=1} = (2x-3)|_{x=1} = -1$,左导数 $y'_-|_{x=1} = -1$.

因此,点 $x=1$ 的导数存在,且 $y'|_{x=1} = -1$.同理,可得 $y'|_{x=2} = 1$.于是,

$$y' = \begin{cases} -1, & -\infty < x < 1, \\ 2x-3, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 < x < +\infty. \end{cases} \quad (\text{图 2.9})$$

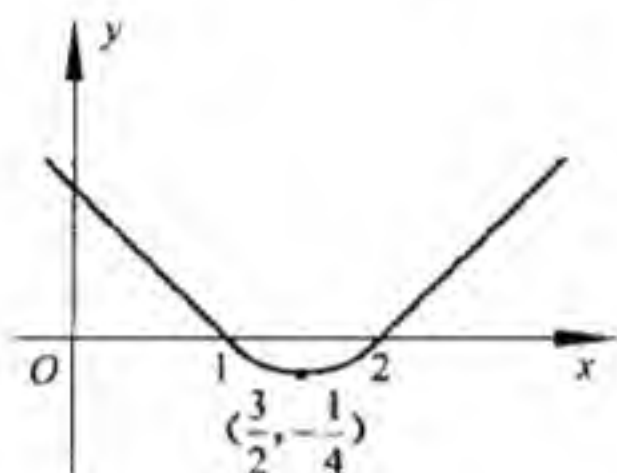


图 2.8

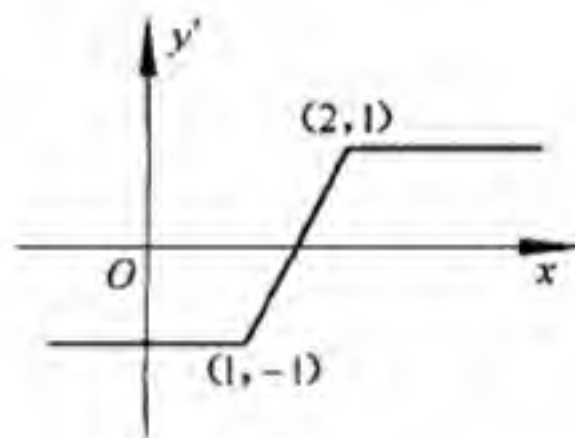


图 2.9

注 在下面的 980 到 983 题中,求分段定义函数的导数时,在分段点,都要先求其左、右导数.为简便计,我们只写出结果,而省去了(在分段点)求左、右导数的过程.

$$\text{【980】 } y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{在线段 } [a, b] \text{ 之外.} \end{cases} \quad (\text{图 2.10})$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (\text{图 2.11})$$

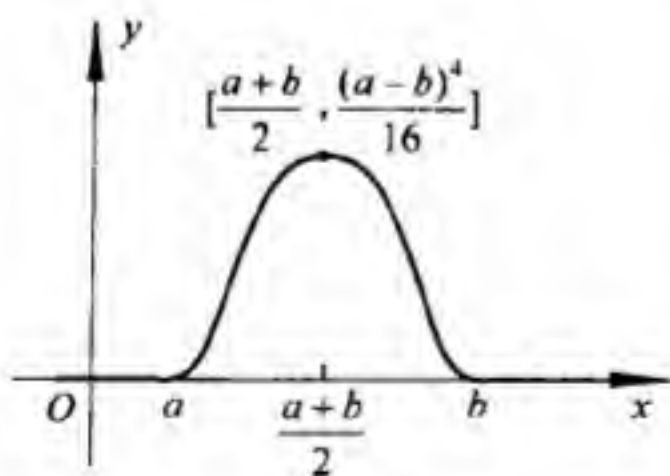


图 2.10

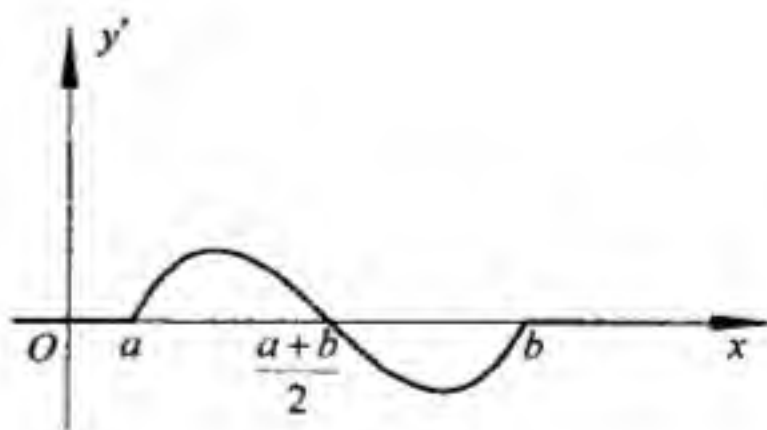


图 2.11

$$\text{【981】 } y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.12})$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.13})$$

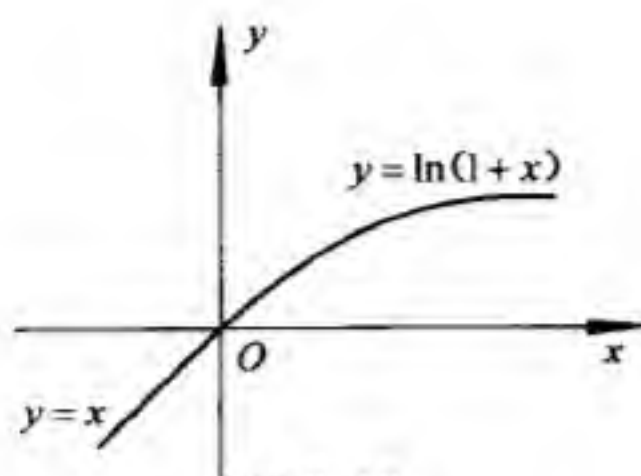


图 2.12

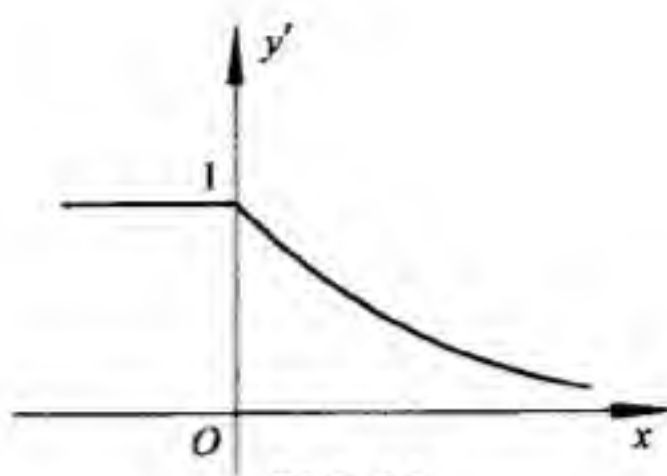


图 2.13

【982】 $y = \begin{cases} \arctan x, & |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$ (图 2.14)

解 $y' = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & -1 < x \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$ (图 2.15)

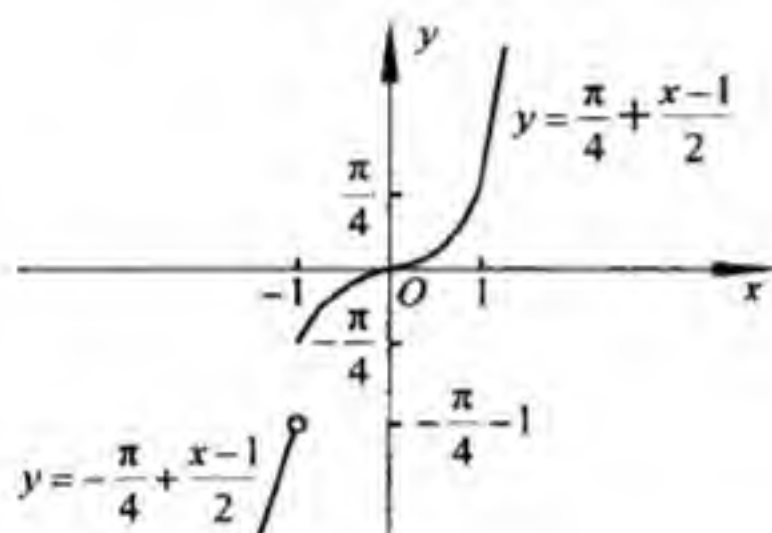


图 2.14

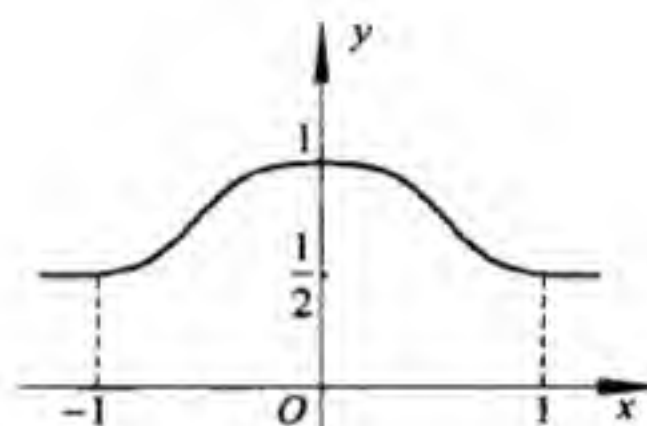


图 2.15

【983】 $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$ (图 2.16)

解 $y' = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$ (图 2.17)

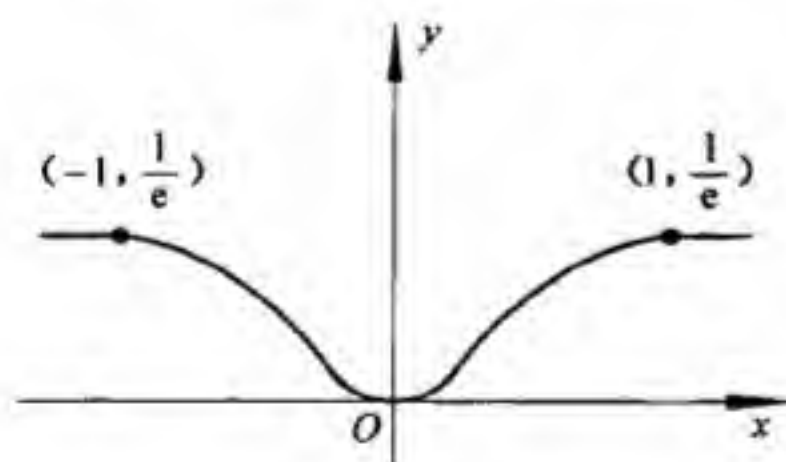


图 2.16

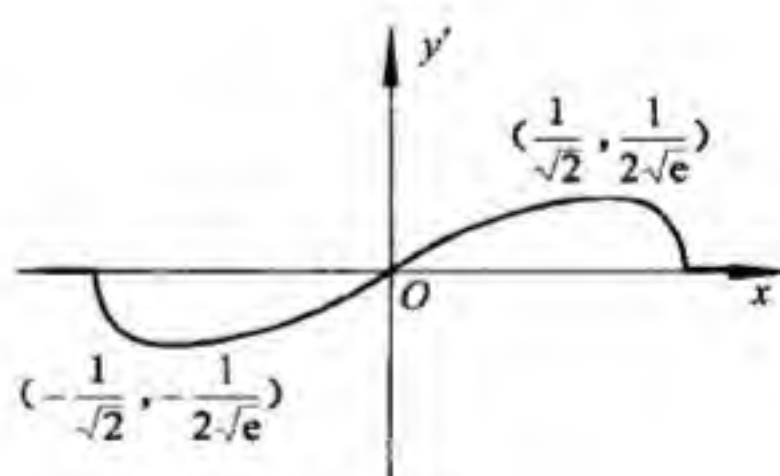


图 2.17

【984】 所给函数的对数的导数称为此函数的对数导数：

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (f(x) > 0).$$

求下列函数 y 的对数导数：

(1) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

(2) $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

(3) $y = (x-a_1)^{\alpha_1} (x-a_2)^{\alpha_2} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n}$;

(4) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

解题思路 (1) 由 $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得 $\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|$, 利用 977 题(3)的结果, 即易获解.

(2) 注意 $\ln y = 2 \ln |x| - \ln |1-x| + \frac{1}{3} \ln |3-x| - \frac{2}{3} \ln |3+x|$, 仿(1)可得

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{54 - 36x - 4x^2 + 2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)} \quad (x \neq 0, x \neq 1, |x| \neq 3).$$

(3) 注意 $\ln y = \sum_{i=1}^n a_i \ln |x - a_i|$, 仿(1)可得

$$\frac{d}{dx} \ln y = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - a_i} \quad (x \in A), \text{ 其中 } A = \left\{ x \mid \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{a_i} > 0 \right\}.$$

(4) 注意 $\ln y = n \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 利用 895 题的结果, 即易获解.

解 (1) 由 $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|,$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)} \quad (0 < |x| < 1);$$

(2) 由 $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y = 2 \ln |x| - \ln |1-x| + \frac{1}{3} \ln |3-x| - \frac{2}{3} \ln |3+x|,$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3(3-x)} - \frac{2}{3(3+x)} = \frac{54 - 36x - 4x^2 + 2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)} \quad (x \neq 0, x \neq 1, |x| \neq 3);$$

(3) 由于 $y = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{a_i}$ 及 y 在对数符号内, 故应设 $\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{a_i} > 0$, 从而有

$$\ln y = \ln \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{a_i} = \sum_{i=1}^n a_i \ln |x - a_i|,$$

得 $\frac{d}{dx} \ln y = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x - a_i} \quad (x \in A), \text{ 其中 } A = \left\{ x \mid \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{a_i} > 0 \right\};$

(4) 由 $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y = n \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad \frac{d}{dx} \ln y = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

【985】 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微函数. 求下列函数 y 的导数:

$$(1) y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)};$$

$$(2) y = \arctan \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

$$(3) y = \varphi^{(x)} \sqrt{\psi(x)} \quad [\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0];$$

$$(4) y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x) \quad [\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0].$$

提示 (3) 注意由 $y = \varphi^{(x)} \sqrt{\psi(x)}$ 得 $\ln y = \frac{1}{\varphi(x)} \ln \psi(x)$, 两边同时对 x 求导, 即可获解 ($\frac{d}{dx} \ln y = \frac{y'}{y}$).

$$(4) \text{ 由 } y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x) \text{ 得 } y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}.$$

$$\text{解 } (1) y' = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}} \quad [\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0].$$

$$(2) y' = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}} \cdot \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\psi^2(x)} = \frac{\varphi'(x)\psi(x) - \psi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)} \quad (\psi(x) \neq 0).$$

(3) 由 $y = \varphi^{(x)} \sqrt{\psi(x)}$ 得

$$\ln y = \frac{1}{\varphi(x)} \ln \psi(x), \quad \frac{y'}{y} = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \varphi(x) - \varphi'(x) \ln \psi(x)}{\varphi^2(x)},$$

于是, $y' = \varphi'(x) \sqrt{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}$.

(4) 由 $y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x)$ 得

$$y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)}, \quad y' = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \varphi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}.$$

【986】 求 y' , 设:

(1) $y = f(x^2)$; (2) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$; (3) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$; (4) $y = f\{f[f(x)]\}$.

其中 $f(u)$ 为可微函数.

解 (1) $y' = 2xf'(x^2)$;

(2) $y' = 2\sin x \cos x f'(\sin^2 x) - 2\sin x \cos x f'(\cos^2 x) = \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)]$;

(3) $y' = e^{f(x)} [f'(x) f(e^x) + e^x f'(e^x)]$;

(4) $y' = f'(x) f'[f(x)] f'\{f[f(x)]\}$.

【987】 证明 n 阶行列式微分法:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

提示 从行列式的定义出发或利用数学归纳法予以证明.

证 证法 1: 从行列式的定义出发予以证明.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} [f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots f_{nj_n}(x)] \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i=1}^n f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

*) 其中 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数. $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

证法 2: 利用数学归纳法予以证明.

由于

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} &= \frac{d}{dx} [f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)] \\
&= \left[\frac{d}{dx} f_{11}(x)f_{22}(x) - \frac{d}{dx} f_{12}(x)f_{21}(x) \right] + \left[\frac{d}{dx} f_{22}(x)f_{11}(x) - \frac{d}{dx} f_{21}(x)f_{12}(x) \right] \\
&= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} f_{11}(x) & \frac{d}{dx} f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx} f_{21}(x) & \frac{d}{dx} f_{22}(x) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

故等式(1)对于 $n=2$ 时成立.

今假定等式(1)对于 $n=k$ 时成立, 即

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix}.$$

要证明等式(1)对于 $n=k+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1,k+1}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k+1,1}(x) & f_{k+1,2}(x) & \cdots & f_{k+1,k+1}(x) \end{vmatrix} \\
&= \frac{d}{dx} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1,j-1}(x) & f_{1,j+1}(x) & \cdots & f_{1,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k,j-1}(x) & f_{k,j+1}(x) & \cdots & f_{k,k+1}(x) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \frac{d}{dx} \left[f_{k+1,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1,j-1}(x) & f_{1,j+1}(x) & \cdots & f_{1,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k,j-1}(x) & f_{k,j+1}(x) & \cdots & f_{k,k+1}(x) \end{vmatrix} \right] \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \left[\frac{d}{dx} f_{k+1,j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1,j-1}(x) & f_{1,j+1}(x) & \cdots & f_{1,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k,j-1}(x) & f_{k,j+1}(x) & \cdots & f_{k,k+1}(x) \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + f_{k+1,j}(x) \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1,j-1}(x) & f_{1,j+1}(x) & \cdots & f_{1,k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{k,j-1}(x) & f_{k,j+1}(x) & \cdots & f_{k,k+1}(x) \end{vmatrix} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x)f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ij-1}(x) \frac{d}{dx} f_{ij+1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x)f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} f_{k+1j}(x) \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1j-1}(x)f_{1j+1}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ij-1}(x) \frac{d}{dx} f_{ij+1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{k1}(x) & \cdots & f_{kj-1}(x)f_{kj+1}(x) & \cdots & f_{kk+1}(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{ik+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

故等式(1)对于 $n=k+1$ 时也成立.

于是,由数学归纳法知,等式(1)对于一切正整数 n 均成立.

【988】 设 $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$, 求 $F'(x)$.

提示 利用 987 题的结果.

解 利用 987 题结果,有

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^2 - x + 3) = 3(x^2 + 5).
\end{aligned}$$

【989】设 $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$, 求 $F'(x)$.

提示 利用 987 题的结果.

解 $F'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2.$

【990】已知函数的图像, 近似地作出其导数的图像.

解 先由给定曲线 $y=f(x)$ 上一点 M , 作出曲线 $y'=f'(x)$ 上的对应点 M' . 为清楚起见, 作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$, 取相同的单位, x 轴与 x' 轴平行, y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上 (如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y=f(x)$, 在曲线上任取一点 $M(x, f(x))$, 并作曲线在点 M 处的切线 MN . 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1, 0)$, 作平行 MN 的直线 PQ , 交 y' 轴于点 Q . 于是,

$$O'Q = \tan \alpha = f'(x),$$

即线段 $O'Q$ 是对应于在点 x 的导数 $f'(x)$. 再过点 Q 引平行 x 轴的直线, 交过点 $(x, 0)$ 且垂直于 x 轴的直线于点 M' , 则点 M' 就是曲线 $y'=f'(x)$ 上对应于曲线 $y=f(x)$ 上点 M 的点.

由此, 我们就可由已给曲线 $y=f(x)$ 作出曲线 $y'=f'(x)$, 按上述方法, 在曲线 $y=f(x)$ 上取若干点:

$$M_i(x_i, f(x_i)) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

且在 Oxy' 系 (相当于 $O'x'y'$ 系, 这是为了方便起见, 分开画) 内作出相应点:

$$M'_i(x_i, f'(x_i)) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

最后用光滑曲线连接 M'_1, M'_2, \dots, M'_n 各点, 此即已给曲线 $y=f(x)$ 对应的导数 $y'=f'(x)$ 的图像, 如图 2.19 所示.

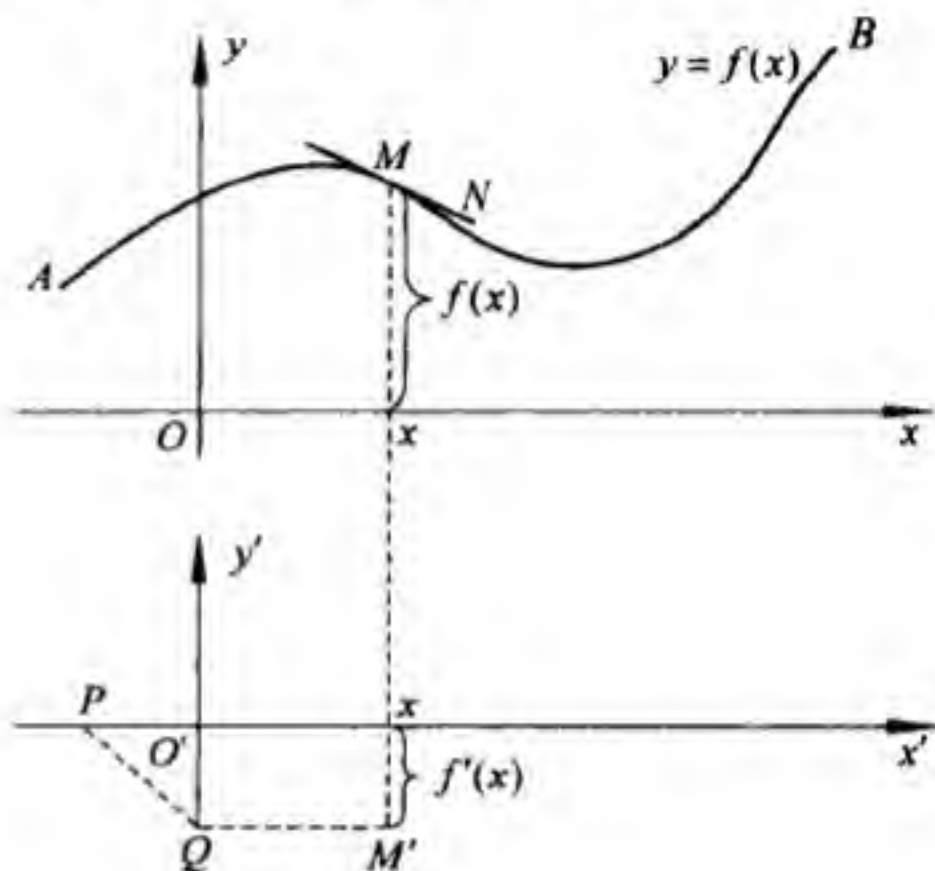


图 2.18

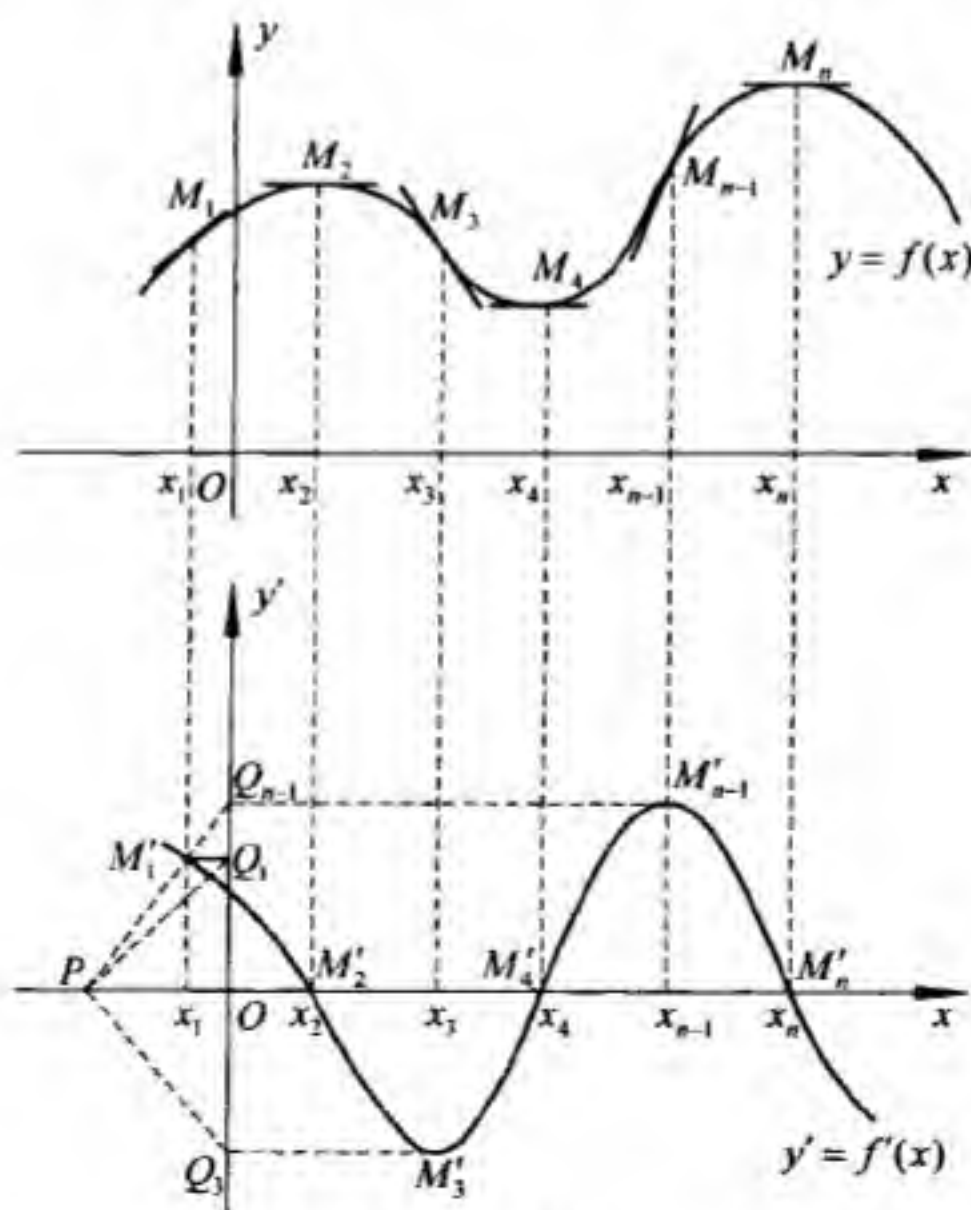


图 2.19

【991】 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 有不连续的导数.

证明思路 当 $x \neq 0$ 时, 容易求得 $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$; 当 $x = 0$ 时, 由定义可得 $f'(0) = 0$, 故导数 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义. 但是, 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 不存在. 因此, $x = 0$ 为 $f'(x)$ 的不连续点.

证 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, 而

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0,$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 中处处存在. 但当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x)$ 并不趋向于任何极限, 所以, $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处是不连续的, 这说明了 $f(x)$ 有不连续的导数.

【992】 在什么条件下, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(1) 在 $x = 0$ 处是连续的; (2) 在 $x = 0$ 处可微; (3) 在 $x = 0$ 处有连续导数?

提示 (1) $n > 0$. 注意当 $n = \frac{p}{q}$ (p, q 互素) 且 q 为偶数时, 只考虑 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续.

(2) $n > 1$. (3) $n > 2$.

解 (1) 当 $n > 0$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 此时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的 (当 $n = \frac{p}{q}$ (p, q 互素) 且 q 为偶数时, 只考虑在 $x = 0$ 处右连续).

(2) 当 $n > 1$ 时

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

于是, $f'(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可微.

(3) 当 $n > 2$ 时, 由于

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$. 而由 (2) 可得 $f'(0) = 0$, 所以, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. 这就说明当 $n > 2$ 时, $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

【993】 在什么条件下, 函数

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (m > 0)$$

(1) 于坐标原点的邻域上有有界的导数;

(2) 在此邻域上有无穷导数?

解 (1) 当 $x \neq 0$, $x \in (-\delta, \delta)$ ($\delta > 0$) 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= n|x|^{n-1} \frac{|x|}{x} \sin \frac{1}{|x|^m} - \frac{m}{|x|^{m+1}} \cdot \frac{|x|}{x} \cdot |x|^n \cdot \cos \frac{1}{|x|^m} \\ &= \frac{|x|}{x} \left[n|x|^{n-1} \sin \frac{1}{|x|^m} - m|x|^{n-(m+1)} \cos \frac{1}{|x|^m} \right]. \end{aligned}$$

由于 $\frac{|x|}{x}$, $\sin \frac{1}{|x|^m}$, $\cos \frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数, 于是, 当 $n \geq m+1$ 时, $f'(x)$ 为有界函数 (易知此时 $f'(0) = 0$).

(2) 在此邻域上, 当 $n-(m+1)<0$ (即 $n<m+1$) 时, $f'(x)$ 无界. 另一方面, 同 992 题(2)一样, 当 $n>1$ 时 $f'(0)$ 才存在, 因而, 所求的条件为

$$1 < n < m+1 \quad (m > 0).$$

【994】 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的, 求 $f'(a)$.

提示 利用导数的定义及 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处的连续性.

$$\text{解 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a+\Delta x)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x),$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a)$. 于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \varphi(a),$$

即 $f'(a) = \varphi(a)$.

【995】 设 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为连续函数及 $\varphi(a) \neq 0$, 证明: 此函数在 a 点没有导数. 单侧导数 $f'_-(a)$ 及 $f'_+(a)$ 等于什么?

提示 注意 $f'_-(a) = -\varphi(a)$, $f'_+(a) = \varphi(a)$.

$$\text{解 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \varphi(a+\Delta x) = \begin{cases} \varphi(a+\Delta x), & \Delta x > 0, \\ -\varphi(a+\Delta x), & \Delta x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} [-\varphi(a+\Delta x)] = -\varphi(a), \quad \text{即 } f'_-(a) = -\varphi(a);$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} [\varphi(a+\Delta x)] = \varphi(a), \quad \text{即 } f'_+(a) = \varphi(a).$$

由于 $\varphi(a) \neq 0$, 故 $f'_-(a) \neq f'_+(a)$, 因此, $f(x)$ 在 a 点没有导数.

【996】 举出在已知点: a_1, a_2, \dots, a_n 没有导数的连续函数的例子.

提示 已知 $y = |x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 由此, 可令 $y = \sum_{k=1}^n |x-a_k|$.

解 我们已知 $y = |x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 利用这一点, 我们作一个函数

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^n |x-a_k|,$$

它在 a_1, a_2, \dots, a_n 点均连续, 而在这些点均无导数.

【997】 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域上都有不可微点, 但在该点是可微的.

作出此函数的略图.

证 对于函数 $f(x)$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{x} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$, 即在 $x=0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x=0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$ (其中 $\delta > 0$) 中, 函数 $f(x)$ 总有不可微点. 事实上, 令

$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时, 总可使 $0 < x_n < \delta$, 从而点 $x_n \in (-\delta, \delta)$. 对于这样的点 x_n , 有

$$f'_-(x_{2n}) = \pi \quad \text{及} \quad f'_+(x_{2n}) = -\pi,$$

所以,

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_{-}(x_{2n+1}) \neq f'_{+}(x_{2n+1}),$$

于是, 函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图像全在 Ox 轴上方, 包括原点; 当 $x = \frac{2}{2n+1}$ 时, $f(x) = 0$, 且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图

2.20 所示.

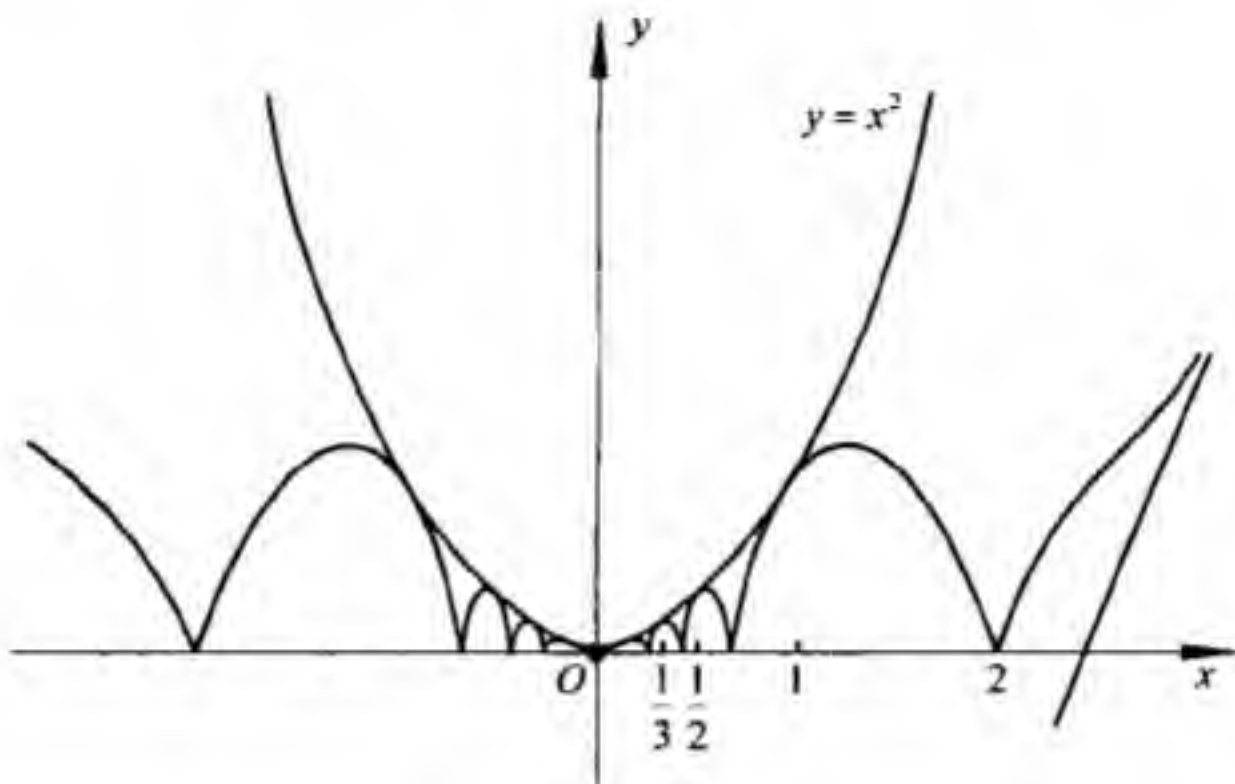


图 2.20

【998】 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

证 $\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \Delta x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ 于是, 有 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0$, 即 $f'(0) = 0$.

其次, 对于任一点 $x \neq 0$, 分两种情形讨论函数的可微性:

(1) x 为有理数. 取一无理数数列 $\{x_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 则有

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{0 - x^2}{x_n - x} = \infty.$$

由此可知, 函数 $f(x)$ 在任一有理点 ($\neq 0$) 不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数数列 $\{x'_n\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x$, 则有

$$\lim_{x'_n \rightarrow x} \frac{f(x'_n) - f(x)}{x'_n - x} = \lim_{x'_n \rightarrow x} \frac{x'^2_n}{x'_n - x} = \infty.$$

由此可知, 函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

综上所述, 函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

【999】 研究下列函数的可微性:

(1) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$

(2) $y = |\cos x|;$

(3) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$

(4) $y = \arcsin(\cos x);$

(5) $y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x| \leq 1, \\ |x| - 1, & |x| > 1. \end{cases}$

解 (1) 当 $x \neq 1$ 或 $x \neq 2$ 或 $x \neq 3$ 时, 函数均可微. 现在我们来考虑在 1, 2, 3 这三点的可微性.

(i) 当 $x=1$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} |(\Delta x - 1)^2(\Delta x - 2)^3|,$$

故 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -8.$

因此, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在, 由此可知 y 在 $x=1$ 点时不可微;

(ii) 当 $x=2$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 1)(\Delta x - 1)^3|, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而, y 在 $x=2$ 点可微;

(iii) 当 $x=3$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 2)(\Delta x + 1)^2 \Delta x|, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而, y 在 $x=3$ 点可微;

(2) $y = |\cos x|$ 在 $x = \frac{2k-1}{2}\pi$ (k 为整数) 点不可微.

(3) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 只可能在 $x = \pm\pi$ 的点不可微.

现在我们来考察在 $x = -\pi$ 及 $x = \pi$ 时函数 y 的可微性.

(i) 当 $x = \pi$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2| \sin^2(\pi + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\sin \Delta x \sin \Delta x |2\pi \Delta x + (\Delta x)^2|}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以, 函数 y 在 $x = \pi$ 点可微.

(ii) 同理可证函数 y 在 $x = -\pi$ 点也可微. 于是, 函数 $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 处处可微.

(4) $y = \arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x| = 1$ 的点不可微, 即在 $x = k\pi$ (k 为整数) 的点不可微.

(5) 函数 y 对于 $|x| \neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x| = 1$ 点的可微性.

(i) 当 $x = 1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\Delta x + 2)^2, & \Delta x < 0, \\ 1, & \Delta x > 0. \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad \text{及} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

所以, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, 即函数 y 在 $x = 1$ 点可微.

(ii) 当 $x = -1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{|-1 + \Delta x| - 1}{\Delta x} = -1, & \Delta x < 0, \\ \frac{(-2 + \Delta x)(\Delta x)^2}{4} = -\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \Delta x > 0. \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \quad \text{及} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以, 函数 y 在 $x = -1$ 点不可微.

求函数 $f(x)$ 的左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$. 设:

【1000】 $f(x) = |x|$.

解 当 $x \neq 0$ 时, 易见

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x;$$

当 $x = 0$ 时,

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0, \\ 1, & \Delta x > 0. \end{cases}$$

所以, $f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1$.

【1001】 $f(x)=[x]\sin\pi x$.

解 当 x 不等于整数时,

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x;$$

当 x 为整数时,从定义出发得

$$f'_+(k)=\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{k\cos k\pi \sin(\pi\Delta x)}{\Delta x} = k\pi(-1)^k,$$

同法可得 $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$.

【1002】 $f(x)=\begin{cases} x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

解 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时 (即使 $\cos\frac{\pi}{x} \neq 0$ 的 x 值),

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| + \frac{\pi}{x} \frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}} \sin\frac{\pi}{x} = \left(\cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin\frac{\pi}{x}\right) \operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);$$

当 $x=\frac{2}{2k+1}$ 时,从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2}\pi, \quad f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{2k+1}{2}\pi \quad (k \text{ 为整数}).$$

【1003】 $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

解 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ ($k=0,1,2,\dots$) 时,

$$f'_+(x)=f'_-(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

当 $x=0$ 时,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} = 1; \quad f'_-(0)=\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}}\right] = -1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}$ ($k=1,2,\dots$) 时,我们有

$$\begin{aligned} f'_+(\sqrt{2k\pi}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \left[\sqrt{\frac{\sin[2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2]}{2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2}} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}+1}{\Delta x}} \right] = +\infty; \end{aligned}$$

同理,可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi})=-\infty \quad (k=1,2,\dots); \quad f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty \quad (k=1,2,\dots).$$

【1004】 $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

解 当 $x \neq 0$ 时

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2};$$

当 $x=0$ 时,

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0.$$

【1005】 $f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}}$.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}};$$

当 $x=0$ 时,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = -1.$$

同理, 可得 $f'_+(0) = 1$.

【1006】 $f(x) = |\ln|x||$ ($x \neq 0$).

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{|\ln|x||}{\ln|x|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \frac{|\ln|x||}{\ln|x|},$$

分两种情况:

(I) 当 $0 < |x| < 1$ 时, $f'_-(x) = f'_+(x) = -\frac{1}{x}$;

(II) 当 $|x| > 1$ 时, $f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{x}$;

当 $|x| = 1$ 时,

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\ln|1+\Delta x||}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow -0} |\ln(1+\Delta x)|^{\frac{1}{\Delta x}} = -\ln e = -1,$$

同理, 可得 $f'_-(-1) = -1$, $f'_+(\pm 1) = 1$.

【1007】 $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2}{1+x^2} \operatorname{sgn}(1-x^2),$$

当 $x=1$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2} - \arcsin 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left[\frac{\arcsin \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}}{\frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{1+(1+\Delta x)^2}} \cdot \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \right] = 1. \end{aligned}$$

同理, 可得 $f'_-(-1) = -1$, $f'_+(1) = -1$, $f'_+(-1) = 1$.

【1008】 $f(x) = \begin{cases} (x-2)\arctan \frac{1}{x-2}, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$

解 当 $x \neq 2$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \arctan \frac{1}{x-2} + \frac{x-2}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} \left[-\frac{1}{(x-2)^2} \right] = \arctan \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{(x-2)^2+1};$$

当 $x=2$ 时

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \arctan \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2},$$

同理可求得 $f'_+(2) = \frac{\pi}{2}$.

【1009】 证明:函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续,但在此点既无左导数,又无右导数.

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以, $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

其次,由于

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左侧还是从右侧趋于零,此极限均不存在.因此,在点 $x=0$ 函数 $f(x)$ 既无左导数,也无右导数.

【1010】 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0, \\ ax+b, & x > x_0. \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续而且可微,应当如何选择系数 a 和 b ?

提示 注意 $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0-0)$, $f(x_0+0) = ax_0+b$, $f'_-(x_0) = 2x_0$, $f'_+(x_0) = a$.

解 $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0-0)$, $f(x_0+0) = ax_0+b$. 当 $x_0^2 = ax_0+b$ 时,函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 又因 $f'_-(x_0) = 2x_0$, $f'_+(x_0) = a$, 故当 $a = 2x_0$ 时,函数在点 x_0 处可微. 从而得 $x_0^2 = 2x_0^2+b$, 即 $b = -x_0^2$.

于是,所求的系数为 $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$.

【1011】 设 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ ax+b, & x > x_0, \end{cases}$ 其中函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为左可微的. 应当如何选择系数 a 和 b , 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微?

提示 注意 $F(x_0) = f(x_0) = F(x_0-0)$, $F(x_0+0) = ax_0+b$, $F'_-(x_0) = f'_-(x_0)$, $F'_+(x_0) = a$, 1010 题即为本题的特例.

解 $F(x_0) = F(x_0-0) = f(x_0)$, $F(x_0+0) = ax_0+b$. 当 $f(x_0) = ax_0+b$ 时,函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_-(x_0) = f'_-(x_0)$, $F'_+(x_0) = a$, 故当 $a = f'_-(x_0)$ 时,函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微.

解方程组 $\begin{cases} a = f'_-(x_0), \\ f(x_0) = ax_0+b, \end{cases}$ 即得所求的系数为 $a = f'_-(x_0)$, $b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0)$.

【1012】 适当地选定参数 A 与 c , 用立方抛物线

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c)$$

在区域 $a \leq x \leq b$ 上把两条射线:

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a) \quad \text{及} \quad y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来.

提示 注意在接点处两条曲线的切线重合时,它们就光滑地连接起来,由此易得:在点 $x=a$ 处,有 $A(a-b)(a-c) = k_1$; 在点 $x=b$ 处, $A(b-a)(b-c) = k_2$.

解 对于立方抛物线,

$$y' = A[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时,它们就光滑地连接起来,此时应有相等的斜率. 于是,有

(i) 在点 $x=a$ 处,

$$A(a-b)(a-c) = k_1; \quad (1)$$

(ii) 在点 $x=b$ 处,

$$A(b-a)(b-c) = k_2. \quad (2)$$

联立(1)和(2)式,解之得

$$A = \frac{k_1 + k_2}{(b-a)^2}, \quad c = \frac{ak_2 + bk_1}{k_1 + k_2}.$$

【1013】 用抛物线 $y=a+bx^2$ ($|x|\leq c$) (其中 a 与 b 为未知的参数) 去补充曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$ ($|x|>c$) 的部分, 以便得到一条光滑曲线.

提示 显见 $c>0$, 注意在点 $x=c$ 处, 有

$$(a+bx^2)' \Big|_{x=c} = \left(\frac{m^2}{|x|} \right)' \Big|_{x=c} \quad \text{及} \quad a+bc^2 = \frac{m^2}{c}.$$

由对称性可知, 在点 $x=-c$ 处, 按上述条件求得的系数 a 与 b 也使两曲线光滑连接.

解 显见 $c>0$, 否则在点 $x=c$ 处就不可能形成一条光滑曲线. 此时, 在点 $x=c$ 处两曲线的切线斜率相等, 且有相同的纵坐标. 于是, 有

$$(a+bx^2)' \Big|_{x=c} = \left(\frac{m^2}{|x|} \right)' \Big|_{x=c} \quad \text{及} \quad a+bc^2 = \frac{m^2}{c}.$$

从而得 $2bc = -\frac{m^2}{c^2}$, $a+bc^2 = \frac{m^2}{c}$. 解之, 得 $a = \frac{3m^2}{2c}$, $b = -\frac{m^2}{2c^3}$.

由曲线的对称性可知, 在点 $x=-c$ 处, 按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y=a+bx^2$ 与曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$ 也连成一条光滑曲线.

【1014】 若: (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (2) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数, 可否断定它们的和 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在点 x_0 没有导数?

提示 (1) 能. 易证.

(2) 不能. 例如, $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $g(x) = \frac{x-|x|}{2}$, 在点 $x=0$ 处.

解 (1) 能. 因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$, 上式右端第一项的极限存在, 而第二项的极限不存在, 因而当 $\Delta x \rightarrow 0$, 左端的极限也不存在 (否则差 $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在, 与 $g(x)$ 不可导相矛盾), 这说明 $F(x)$ 在点 x_0 处没有导数.

(2) 不能. 例如,

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2}, \quad g(x) = \frac{x-|x|}{2},$$

它们在点 $x=0$ 处都没有导数, 但它们的和 $F(x)=f(x)+g(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数且为 1.

【1015】 若: (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (2) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数, 可否断定他们的积 $F(x)=f(x)g(x)$ 在点 x_0 没有导数?

提示 (1) 不能. 例如, $f(x)=x$, $g(x)=|x|$, 在点 $x=0$ 处.

(2) 不能. 例如, $f(x)=g(x)=|x|$, 在点 $x=0$ 处.

解 (1) 不能. 例如, $f(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数, $g(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处没有导数, 而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|$$

在点 $x=0$ 处有导数. 事实上,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x| - 0 \cdot |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0,$$

即有 $F'(0)=0$.

(2) 不能. 例如,

$$f(x)=|x|, \quad g(x)=|x|,$$

在点 $x=0$ 处它们都没有导数, 但它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=(|x|)^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数, 且 $F'(0)=2x \Big|_{x=0}=0$.

【1016】 若:(1)函数 $f(x)$ 在点 $x=g(x_0)$ 有导数,而函数 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 没有导数;(2)函数 $f(x)$ 在点 $x=g(x_0)$ 没有导数,而函数 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 有导数;(3)函数 $f(x)$ 在点 $x=g(x_0)$ 没有导数及函数 $g(x)$ 在点 $x=x_0$ 没有导数,则函数 $F(x)=f[g(x)]$ 在已知点 $x=x_0$ 的可微性怎样?

提示 (1)不定.(2)不定.(3)不定.读者举例.

解 (1) $F'(x_0)$ 可能存在,也可能不存在.例如,考察函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 及点 x_0 如下:

(i) $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. $f'(0)=0$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x)=f[g(x)]=(|x|)^2=x^2$, $F'(0)=0$. 这是 $F'(x_0)$ 存在的一例.

(ii) $f(x)=x$, $g(x)=|x|$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. $f'(0)=1$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$, $F'(0)$ 不存在. 这是 $F'(x_0)$ 不存在的一例.

(2) $F'(x_0)$ 可能存在,也可能不存在.例如,

(i) $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. $f'(0)$ 不存在, $g'(0)$ 存在, 且等于零; 而 $F(x)=f[g(x)]=|x^2|=x^2$, $F'(0)$ 存在, 且等于零.

(ii) $f(x)=|x|$, $g(x)=x$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. 而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$, $F'(0)$ 不存在.

(3) $F'(x_0)$ 可能存在,也可能不存在.例如,

(i) $f(x)=2x+|x|$, $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. 则 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 易知 $F(x)=f[g(x)]=2\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right)+\left|\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|\right|\equiv x$. 因此 $F'(0)$ 存在且等于 1.

(ii) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$, 点 $x=0$, $g(0)=0$. $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 而 $F(x)=f[g(x)]=|x|$, $F'(0)$ 也不存在.

【1017】 函数 $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ 的图像在哪些点处有竖直切线? 作出此图像.

解 $y'=1+\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ ($x\neq k\pi; k=0, \pm 1, \dots$).

当 $x=k\pi$ 时, 容易直接算出

$$\begin{aligned} y' \Big|_{x=k\pi} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\pi + \Delta x + \sqrt[3]{\sin(k\pi + \Delta x)} - k\pi}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{(-1)^k}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} \right) = \infty, \end{aligned}$$

故当 $x=k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时有竖直切线.

当 $x=k\pi$ 时, $y=k\pi$;

当 $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ 时, $y=x\pm 1$,

其图像如图 2.21 所示.

【1018】 函数 $f(x)$ 在其不连续点可否有:(1)有限的导数;(2)无穷的导数?

提示 (1)不能. (2)能. 例如, $f(x)=\operatorname{sgn} x$, 在点 $x=0$ 处.

解 (1)不能. 否则由此可推出其连续性.

(2)能. 例如, $y=f(x)=\operatorname{sgn} x$ 它在点 $x=0$ 不连续, 但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{1}{|\Delta x|} \rightarrow +\infty \quad (\Delta x \rightarrow 0).$$

【1019】 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a, b) 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, 则是否必有

(1) $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$; (2) $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = +\infty$?

解 (1)一般地说, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$. 例如, 对于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x},$$

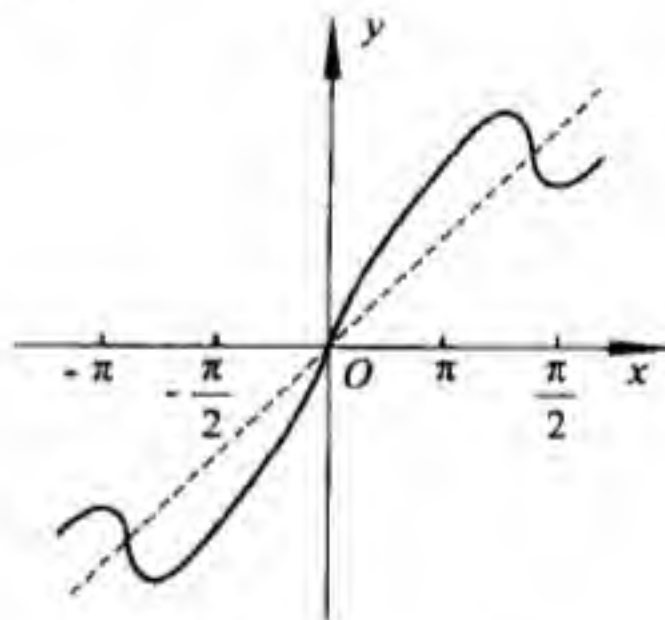


图 2.21

显然有 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$. 但是, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$, 对于特殊的一串数 $x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} (k=1, 2, \dots)$ 有

$f'(x_k) = 0$, 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$, 因而, $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 必有 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = \infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, 故 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的右近旁保持定号, 从而必有 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$, 显然可设前者成立 (否则, 考察函数 $-f(x)$ 即化为前者). 再通过对自变量作代换 $t=a+b-x$ 可知, 我们只需证明下面的命题:

若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (A, B) 上可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow B-0} f(x) = +\infty, \quad (1)$$

则必有

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow B-0} |f'(x)| = +\infty. \quad (2)$$

现在给出上述命题的证明如下:

由(1), 对于任给 $M_0 > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使当 $x \in [B-\delta_0, B)$ 时, 有

$$f(x) \geq M_0 \quad (B_0 \leq x < B, \text{ 其中 } B_0 = B - \delta_0).$$

记 $P = (B_0, f(B_0))$, 有 $f(B_0) \geq M_0$. 为证(2), 我们采用反证法. 设存在 $K > 0$, 使

$$|f'(x)| \leq K \quad (x \in [B_0, B)),$$

则将引出矛盾. 论证如下:

今过 P_0 作斜率为 $2K$ 的直线

$$l: Y - f(B_0) = 2K(x - B_0). \quad (3)$$

它与 $x=B$ 垂线相交于一点 Q , 其纵坐标为

$$y_Q = f(B_0) + 2K(B - B_0) = f(B_0) + 2K\delta_0,$$

记 $M_1 = f(B_0) + 2K\delta_0$, 则 $y_Q = M_1$, 它是直线 l 在 $[B_0, B]$ 上的最大值.

对 M_1 而言, 由(1)可知, 存在 $x_2 \in (B_0, B)$ 使 $f(x_2) > M_1$, 即点 $P_2 = (x_2, f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面, 由在 $x=B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性, 在 $x=B_0$ 右侧邻域内, 对于任给 $\epsilon_1 > 0$ (取 $\epsilon_1 < \frac{K}{2}$), 存在 δ , 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left| f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| < \epsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| \leq |f'(B_0)| + \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} - f'(B_0) \right| < K + \epsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K.$$

即有在 r 曲线 $y=f(x)$ 上: 当 $0 < |x - B_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \quad (4)$$

今取 $x_1 > B_0$, 使 $x_1 < x_2$, $x_1 < B_0 + \delta$. 于是, 由(3)式和(4)式知

$$f(x_1) - f(B_0) < \frac{3}{2}K(x_1 - B_0) < 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0),$$

故 $f(x_1) < Y(x_1)$, 即点 $(x_1, f(x_1))$ 位于直线 l 之下方. 考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x \in [x_1, x_2]} \{x | G(x) > 0\},$$

则由 $G(x_1) < 0$, $G(x_2) > 0$, 易见 c 是存在的, 而且 $G(c) = 0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2 \geq x > c$, 则有 $G(x) > 0$, 即在 c 点附近且 $x > c$ 时, 有 $f(x) > Y(x)$. 从而,

$$f(x) - f(c) > Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c).$$

注意 $x - c > 0$, 故又有 (当 $x > c$, 且在 c 附近时):

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c},$$

上式两边取极限 (让 $x \rightarrow c+0$), 并注意到函数的可微性, 有 $f'(c+0) = f'(c)$, 于是有

$$f'(c) \geq Y'(c) = 2K.$$

此处 $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$, 这个不等式与 $|f'(x)| \leq K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x \in [B_0, B)$ 时是无界的. 这就完成了 (2) 的证明, 从而, 命题获证.

注 若利用以后的拉格朗日定理, 则可很简单地证明此结论.

【1020】 设函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a, b) 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$, 是否必有 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$?

提示 不一定. 例如, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, 在 $(0, b) (b > 0)$ 上.

解 不一定. 例如,

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

它在 $(0, b) (b > 0)$ 上可微, 且 $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$, 然而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$.

【1021】 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 由此能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在?

提示 不能. 例如, 函数 $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, 在 $(0, +\infty)$ 上.

解 不能. 例如, 函数

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在 $(0, +\infty)$ 上可微, $f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 然而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在.

【1022】 设有界函数 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 由此可否推出有限的或无穷的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在?

提示 不能. 例如, 函数 $f(x) = \cos(\ln x)$, 在 $(0, +\infty)$ 上.

解 不能. 例如,

$$f(x) = \cos(\ln x),$$

它在 $(0, +\infty)$ 上有界且可微, 其导数为 $f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$, 同时有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 然而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在.

【1023】 对不等式可否逐项微分?

提示 不可以. 例如, 在 $(-\infty, 0)$ 上有 $2x \leq x^2 + 1$.

解 一般地说不行. 例如, 在 $(-\infty, 0)$ 上有

$$2x \leq x^2 + 1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分, 因为在 $(-\infty, 0)$ 上不等式 $2 \leq 2x$ 不成立.

【1024】 导出求和公式:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1},$$

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}.$$

解题思路 令 $\bar{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, $\bar{Q}_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$, 则有 $(\bar{P}_n)' = P_n$, $(\bar{Q}_n)' = Q_n$ 及 $\bar{Q}_n = xP_n$. 当 $x \neq 1$ 时易得 \bar{P}_n , 从而可得 P_n 及 Q_n . 至于当 $x = 1$ 时已有熟知的求和公式.

解 设

$$\bar{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n, \quad (1)$$

$$\bar{Q}_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n. \quad (2)$$

则 $(\bar{P}_n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = P_n$, $(\bar{Q}_n)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n$.

另一方面, 由 (1) 式得

$$\bar{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \quad (x \neq 1).$$

由于 $(\bar{P}_n)' = P_n$, 即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' = P_n,$$

于是, 得

$$P_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\bar{Q}_n = x(1+2x+\cdots+nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于 $(\bar{Q}_n)' = Q_n$, 所以, $(xP_n)' = Q_n$, 即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \quad (3)$$

而

$$\begin{aligned} P_n' &= \left[\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \right]' \\ &= \frac{[-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n](1-x)^2 + 2(1-x)[1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(1-x)^4} \end{aligned}$$

将 P_n 及 P_n' 代入(3)式, 即得

$$Q_n = \frac{1+x - (n+1)^2 x^n + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - n^2 x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

当 $x=1$ 时已有熟知的求和公式.

【1025】 导出求和公式:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx,$$

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx.$$

解题思路 利用三角积化和差公式, 易得

$$2\sin \frac{x}{2} \cdot S_n = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x = 2\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x, \text{ 再注意到 } T_n = (S_n)' \text{ 即获解.}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } S_n &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[2\sin \frac{x}{2} \sin x + 2\sin \frac{x}{2} \sin 2x + \cdots + 2\sin \frac{x}{2} \sin nx \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \cdots + \left(\cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{即 } S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

又因

$$\begin{aligned} T_n = (S_n)' &= \frac{\left[n\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x + (n+1)\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2} \right] \sin \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{n \left(\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{nx}{2} + \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{\sin \frac{nx}{2} \left(\sin \frac{n+1}{2}x \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{x}{2} \right)}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}},$$

$$\text{所以, } T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

【1026】 利用恒等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

推出求和公式:

$$S_n = \frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}.$$

解题思路 对等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (1)$$

两端分别求导,得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} - \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} - \cdots - \frac{1}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \sin \frac{x}{2^n} \\ &= \frac{\cos x \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n} \sin x \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}. \end{aligned} \quad (2)$$

(2)÷(1),即可获解.

解 对等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (1)$$

两端分别求导数,即得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} - \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} - \cdots - \frac{1}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \sin \frac{x}{2^n} \\ &= \frac{\cos x \sin \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2^n} \sin x \cos \frac{x}{2^n}}{2^n \sin^2 \frac{x}{2^n}}. \end{aligned} \quad (2)$$

(2)÷(1)得

$$-\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \cot x - \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n},$$

所以,

$$\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x.$$

【1027】 证明:可微偶函数的导数为奇函数,而可微奇函数的导数为偶函数.给出这个事实的几何解释.

提示 利用奇、偶函数定义,两端求导即易获证.

证 设 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(x) = f(-x)$. 两端微分之,得

$$f'(x) = -f'(-x), \quad \text{即} \quad f'(-x) = -f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数. 同理可证:可微奇函数的导数为偶函数.

这个事实说明:凡对称于 Oy 轴的图像,其对称点的切线也关于 Oy 轴对称;凡关于原点对称的图像,其

对称点的切线互相平行.

【1028】 证明:可微周期函数的导数仍为具有相同周期的周期函数.

证 设 $f(x)$ 为周期函数, 周期为 T , 则

$$f(x+T)=f(x).$$

两端微分之, 得

$$f'(x+T)=f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数.

【1029】 若圆半径以 2cm/s 的速度匀速增加, 则当圆半径 $R=10\text{cm}$ 时, 圆面积增加的速度如何?

解 设圆面积为 S , 则 $S=\pi R^2$,

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{R=10} = 2\pi R \left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=10} = 40\pi \text{ (cm}^2/\text{s)},$$

故当 R 为 10cm 时, 圆面积的增加速度为 $40\pi\text{cm}^2/\text{s}$.

【1030】 矩形的一边 $x=20\text{m}$, 另一边 $y=15\text{m}$. 若第一边以 1m/s 的速度减少, 而第二边以 2m/s 的速度增加, 问这矩形的面积和对角线变化的速度如何?

解 面积 $S=xy$, 对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$ ($x>0, y>0$), 对 t 求导数, 即得

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt} \quad \text{及} \quad \frac{dl}{dt} = \frac{x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设, 有 $x=20, y=15, \frac{dx}{dt}=-1, \frac{dy}{dt}=2$, 代入上面两式, 得

$$\frac{dS}{dt} = 20 \cdot 2 + (-1) \cdot 15 = 25, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{-20 + 2 \cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}} = 0.4.$$

于是, 该矩形的面积的变化率为 $25\text{m}^2/\text{s}$, 而对角线的变化率为 0.4m/s .

【1031】 二轮船 A 和 B 从同一码头同时出发. A 船往北, B 船往东. 若 A 船的速度为 30km/h , B 船的速度为 40km/h , 问二船间的距离增加的速度如何?

解 记时间为 $t(\text{h})$, A 与 B 离码头的距离分别为 $30t$ 与 $40t(\text{km})$, 注意成直角情形, 故两船间的距离为

$$d(t) = \sqrt{(30t)^2 + (40t)^2} = 50t,$$

故两船间的距离增加的速度为

$$d'(t) = 50\text{km/h}.$$

【1032】 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2x-2, & 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

又设 $S(x)$ 表示由曲线 $y=f(x)$, 轴 Ox 及通过点 x ($x \geq 0$) 且垂直于 Ox 的直线三者围成的面积. 写出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导数 $S'(x)$, 并作出函数 $y=S'(x)$ 的图像.

解 当 $x \in [0, 2]$ 时, $S(x) = \frac{1}{2}x^2$;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时,

$$S(x) = \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{2}(x-2)[2+(2x-2)] = x^2 - 2x + 2.$$

从而有 $S'(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2x-2, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$ (图 2.22)

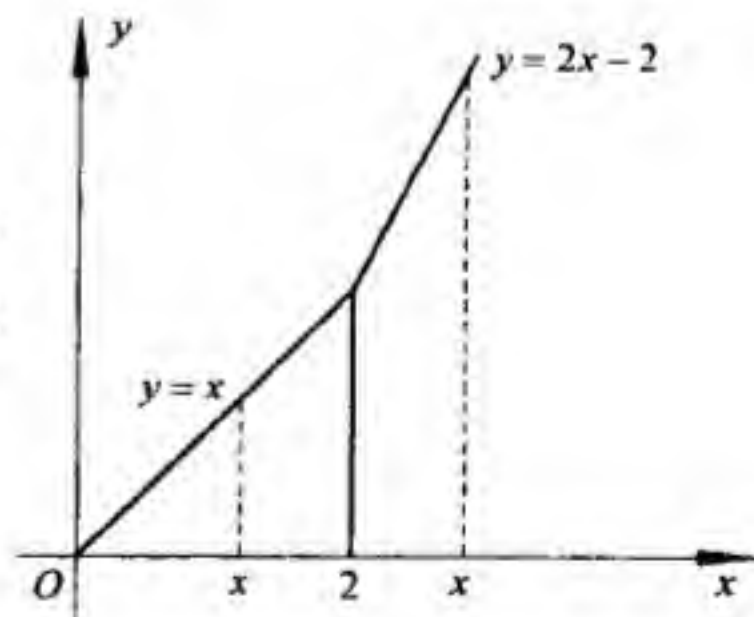


图 2.22

【1033】 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, 轴 Ox 及通过点 O 和 x ($|x| \leq a$) 且垂直于轴 Ox 的两条直线围成的面积. 写出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导数 $S'(x)$, 并作出其导数 $y=S'(x)$ 的图像.

解 $S(x)$ 是由一个直角三角形和一个中心角为 α 的扇形组成, 其中 $\sin \alpha = \frac{|x|}{a}$, 故当 $0 < |x| \leq a$ 时,

$$S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{|x|}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{|x|}{x} \\ &= \frac{|x| \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x \quad (0 < |x| \leq a). \end{aligned}$$

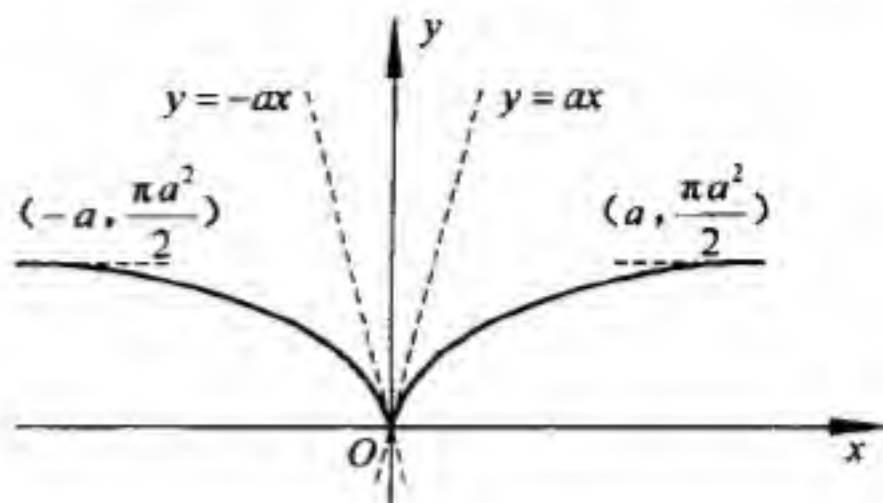


图 2.23

函数 $y = S(x)$ 的图像如图 2.23 所示. 函数 $y = S'(x)$ 的图像就是以原点为中心, a 为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段, 但不包括 $(0, a)$ 点及 $(0, -a)$ 点, 图像省略.

§ 2. 反函数的导数. 用参数形式给出的函数的导数. 隐函数的导数

1° 反函数的导数 导数 $f'(x) \neq 0$ 的可微函数 $y = f(x) (a < x < b)$ 具有单值连续的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 此反函数也可微, 并且成立公式

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2° 用参数形式给出的函数的导数 若方程组

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (a < t < \beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微函数, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 在某区域内确定 y 为 x 的单值连续函数:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导数可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3° 隐函数的导数 若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数之导数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得:

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

其中 $F(x, y)$ 是变量 x 的复合函数.

【1034】 证明: 由方程 $y^3 + 3y = x$ 确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求它的导数 y'_x .

证 对函数 $x = f(y) = y^3 + 3y$ 有

$$f'(y) = 3y^2 + 3 = 3(y^2 + 1) > 0$$

其中 y 为任意实数, 故 $f(y)$ 是严格增大的 (在 $-\infty < y < +\infty$), 因此存在单值的反函数 $y = y(x) (-\infty < x < +\infty)$, 且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

【1035】 证明:由方程 $y - \epsilon \sin y = x$ ($0 \leq \epsilon < 1$) 确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求其导数 y'_x .

提示 仿 1034 题的证明, 并利用反函数的求导公式.

证 对于函数 $x = f(y) = y - \epsilon \sin y$ 有

$$f'(y) = 1 - \epsilon \cos y > 0 \quad (0 \leq \epsilon < 1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增大的, 从而反函数 $y = y(x)$ 存在且是单值的, 且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \epsilon \cos y}.$$

【1036】 设: (1) $y = x + \ln x$ ($x > 0$); (2) $y = x + e^x$; (3) $y = \operatorname{sh} x$; (4) $y = \operatorname{th} x$.

求它们的反函数 $x = x(y)$ 的存在域, 并求它们的导数.

解 (1) 由 $y'_x = 1 + \frac{1}{x} > 0$ ($x > 0$) 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

(2) 由 $y'_x = 1 + e^x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(3) 由 $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

其中因为 $x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$, 所以, $e^x + e^{-x} = 2\sqrt{1+y^2}$.

(4) 由 $y'_x = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2} > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-1 < y < 1$. 由于

$$y^2 = \operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

而 $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{y'_x} = x'_y$, 于是, 反函数的导数 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2}$.

【1037】 设: (1) $y = 2x^2 - x^4$; (2) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$; (3) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

选出反函数 $x = x(y)$ 的单值连续的各支, 求它们的导数并作其图像.

解 (1) $x^4 - 2x^2 + y = 0$, $x^2 = 1 \pm \sqrt{1-y}$. 单值连续的各支为

$$x_1 = -\sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1),$$

$$x_2 = -\sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_3 = \sqrt{1-\sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_4 = \sqrt{1+\sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

由 $y = 2x^2 - x^4$, 微分得 $1 = 4x \frac{dx}{dy} - 4x^3 \frac{dx}{dy}$,

所以, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x-4x^3}$. 从而有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{4x(1-x^2)} \quad (i=1, 2, 3, 4). \quad (\text{图 2.24})$$

(2) $\frac{x^2}{1+x^2} = y$, 即 $x^2 = \frac{y}{1-y}$. 单值连续各支为

$$x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad (0 \leq y < 1).$$

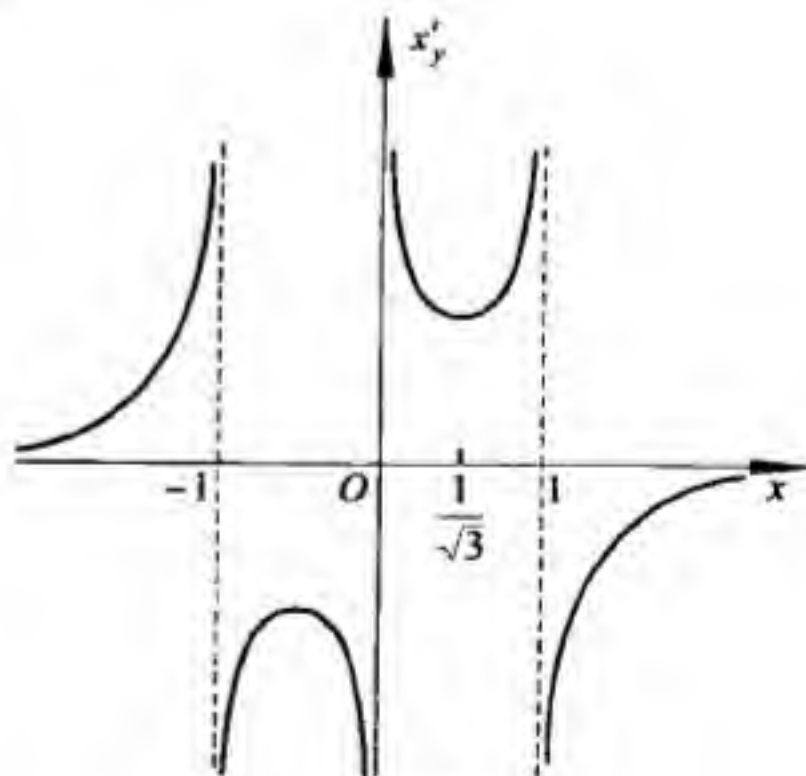


图 2.24

由 $y'_x = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ 及 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x}$, 有 $\frac{dx_i}{dy} = \frac{(1+x^2)^2}{2x} = \frac{x^3}{2y^2}$, 当 $x_i \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{dx_i}{dy} \rightarrow (\operatorname{sgn} x_i) \cdot (+\infty) \quad (i=1,2) \quad (\text{图 2.25})$$

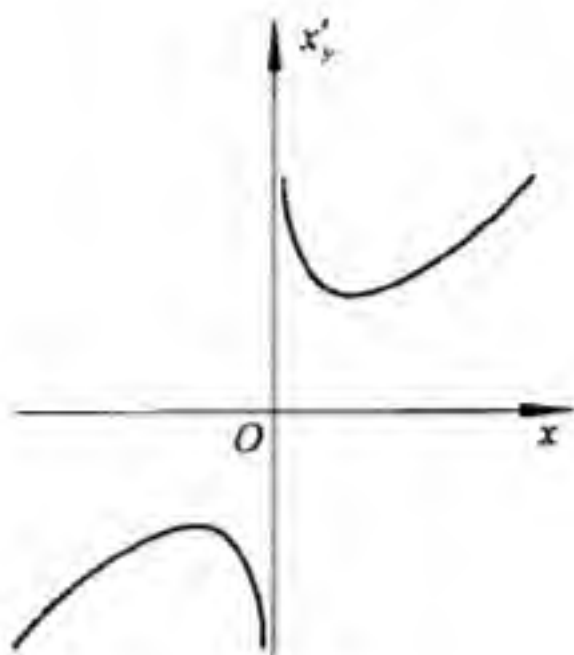


图 2.25

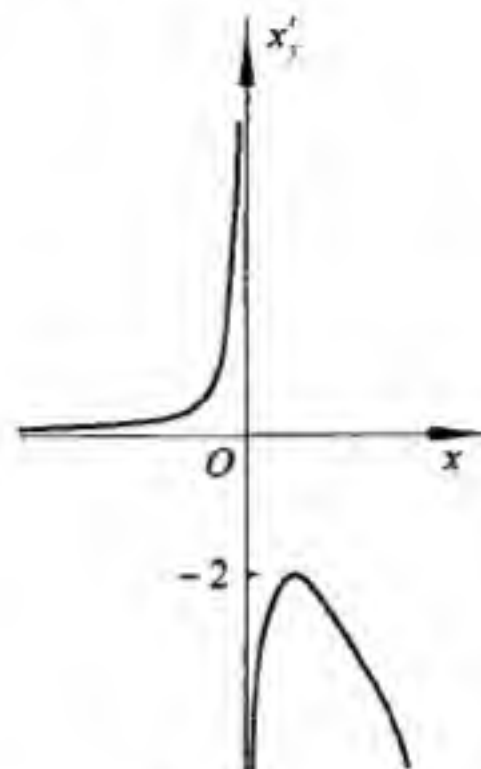


图 2.26

(3) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$, 解出 e^{-x} , 得 $e^{-x} = 1 \pm \sqrt{1-y}$. 单值连续各支为

$$x_1 = -\ln(1 + \sqrt{1-y}) \quad (-\infty < y \leq 1), \quad x_2 = -\ln(1 - \sqrt{1-y}) = \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{y} \quad (0 < y \leq 1).$$

由 $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$, 对 y 求导数, 得 $1 = -2e^{-x} \frac{dx}{dy} + 2e^{-2x} \frac{dx}{dy}$, 所以, $\frac{dx_i}{dy} = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{-2x})} \quad (i=1,2)$.

(图 2.26)

【1038】 作出函数 $y=y(x)$ 的略图, 并求其导数 y'_x . 设: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. 当 $x=0$ 及 $x=-1$ 时, $y'_x(x)$ 等于什么? 在何点 $M(x,y)$ 的导数 $y'_x(x)=0$?

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3+3t^2}{2-2t} = -\frac{3}{2}(1+t).$

当 $t=-1$, 即 $x=-4, y=4$ 时, $y'_x(x)=0$.

当 $x=0$ 时, $t=1$, 此时 $y'_x(x)=-3$; 当 $x=-1$ 时, $t=0$ 或 $t=2$, 此时 $y'_x(x)=-\frac{3}{2}$ 或 $y'_x(x)=-\frac{9}{2}$.

列表:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t < -1$ 时, $\frac{dy}{dx} > 0$, 函数值 y 随自变量增加而增加, 曲线上升.

当 $t > -1$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 曲线下降.

图像如图 2.27 所示.

求导数 y'_x (参数是正数). 设:

【1039】⁺ $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

解 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{6\sqrt{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6\sqrt{t}\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}$,

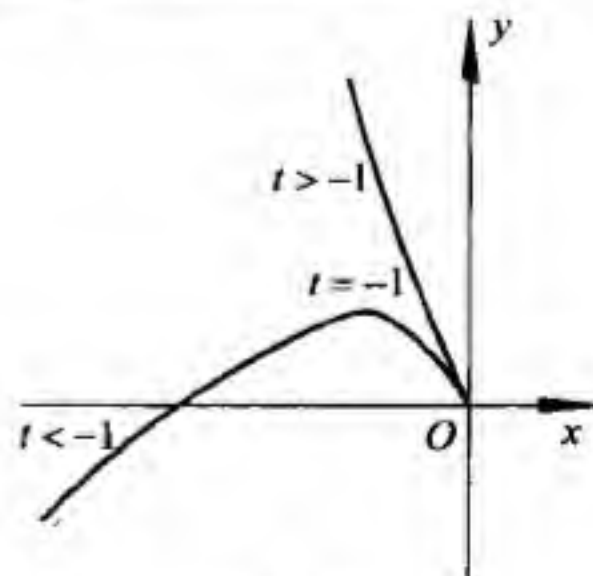


图 2.27

于是, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt[6]{\frac{(1-\sqrt{t})^4}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}} \quad (t>0, t \neq 1).$

【1040】 $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t.$

解 $\frac{dy}{dt} = -2\cos t \sin t, \quad \frac{dx}{dt} = 2\sin t \cos t,$ 于是, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos t \sin t}{2\cos t \sin t} = -1 \quad (0 < x < 1).$

【1041】 $x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t \quad (0 < |t| < \pi).$

【1042】 $x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{b \cosh t}{a \sinh t} = \frac{b}{a} \coth t \quad (t \neq 0).$

【1043】 $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t} = -\tan t \quad (t \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数}).$

【1044】 $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2} \quad (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}).$

【1045】 $x = e^{2t} \cos^2 t, \quad y = e^{2t} \sin^2 t.$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2t}(\sin^2 t + \sin t \cos t)}{2e^{2t}(\cos^2 t - \sin t \cos t)} = \frac{\sin t \cdot \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})}{\cos t \cdot \sqrt{2} \cos(t + \frac{\pi}{4})} = \tan t \tan(t + \frac{\pi}{4})$

$(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数}; t \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n = 0, 1, 2, \dots).$

【1046】 $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

解 $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} \left[-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{1+t^2}-t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$

于是, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgn} t \quad (0 < |t| < +\infty).$

【1047】 证明:由方程组 $\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微,但它的导数不能用普通的公式求得.

提示 易知 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{t=0} = \begin{cases} 3\Delta t, & \Delta t > 0, \\ \Delta t, & \Delta t < 0. \end{cases}$ 再注意到 $|t|$ 在 $t = 0$ 处不可微,即知 $\frac{dy}{dx}$ 在 $t = 0$ 处不能用普通的公式求得.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时, x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$, y 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$. 于是,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{t=0} = \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} = \begin{cases} 3\Delta t, & \Delta t > 0, \\ \Delta t, & \Delta t < 0, \end{cases}$$

从而,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

即 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微, 但由于 $|t|$ 当 $t=0$ 时不可微, 因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t=0$ 时不存在. 所以, 导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t=0$ 的值不能用普通公式求得.

求下列隐函数的导数 y'_x :

【1048】 $x^2+2xy-y^2=2x$. 当 $x=2$ 与 $y=4$ 及当 $x=2$ 与 $y=0$ 时, y' 等于什么?

提示 两端对 x 求导, 并注意 $(xy)'_x = y + xy'_x$ 及 $(y^2)'_x = 2yy'_x$, 即易获解.

1049 题~1053 题均可仿照本题的解法.

解 两端对 x 求导, 得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是,

$$y'_x = \frac{1-x-y}{x-y} \quad (x \neq y), \quad y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=4}} = \frac{5}{2}, \quad y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

【1049】 $y^2=2px$ (抛物线).

解 两端对 x 求导, 得 $2yy'_x=2p$. 于是, $y'_x = \frac{p}{y}$ ($y \neq 0$).

【1050】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

解 两端对 x 求导, 得 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0$. 于是, $y'_x = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ ($y \neq 0$).

【1051】 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (抛物线).

解 两端对 x 求导, 得 $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} y'_x = 0$. 于是, $y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ ($x > 0, y > 0$).

【1052】 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

解 两端对 x 求导, 得 $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} y'_x = 0$. 于是, $y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ ($x \neq 0$).

【1053】 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2}$ (对数螺线).

解 两端对 x 求导, 得 $\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x+yy'_x}{x^2+y^2}$. 于是, $y'_x = \frac{x+y}{x-y}$ ($x \neq y, x \neq 0$).

【1054】 求 y'_x , 设:

(1) $r=a\varphi$ (阿基米得螺线); (2) $r=a(1+\cos\varphi)$ (心脏线); (3) $r=ae^{m\varphi}$ (对数螺线),

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi=\arctan \frac{y}{x}$ 是极坐标.

提示 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 其中 $r=r(\varphi)$. 利用参数方程所确定的函数的求导方式, 可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r\cos\varphi + \sin\varphi \frac{dr}{d\varphi}}{-r\sin\varphi + \cos\varphi \frac{dr}{d\varphi}}.$$

解 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 其中 $r=r(\varphi)$. 于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos\varphi - r\sin\varphi}. \quad (1)$$

(1) $\frac{dr}{d\varphi}=a$, 代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\varphi + a\varphi\cos\varphi}{a\cos\varphi - a\varphi\sin\varphi} = \tan(\varphi + \arctan\varphi).$$

(2) $\frac{dr}{d\varphi} = -a\sin\varphi$, 代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a\sin^2\varphi + a(1+\cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi - a(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = -\frac{\cos 2\varphi + \cos\varphi}{\sin 2\varphi + \sin\varphi} = -\frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} = -\cot\frac{3\varphi}{2} \quad (\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm\frac{2\pi}{3}).$$

(3) $\frac{dr}{d\varphi} = mae^{m\varphi}$, 代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi + ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi - ae^{m\varphi}\sin\varphi} = \frac{m\sin\varphi + \cos\varphi}{m\cos\varphi - \sin\varphi} = \tan(\varphi + \arctan\frac{1}{m}).$$

§ 3. 导数的几何意义

1° 切线和法线的方程 可微函数 $y=f(x)$ 在其图像上之一点 $M(x, y)$ (图 2.28) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程分别具有以下形式:

$$Y-y=y'(X-x) \quad \text{及} \quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X, Y 为切线或法线上的点的坐标, 而 $y'=f'(x)$ 为切点处导数的值.

2° 切线长和法线长 对于与切线和法线有关的一些线段: PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线. 考虑到 $\tan\alpha=y'$ (图 2.28), 我们得到下列值:

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, \quad PN = |yy'|, \quad MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1+y'^2}, \quad MN = |y| \sqrt{1+y'^2}.$$

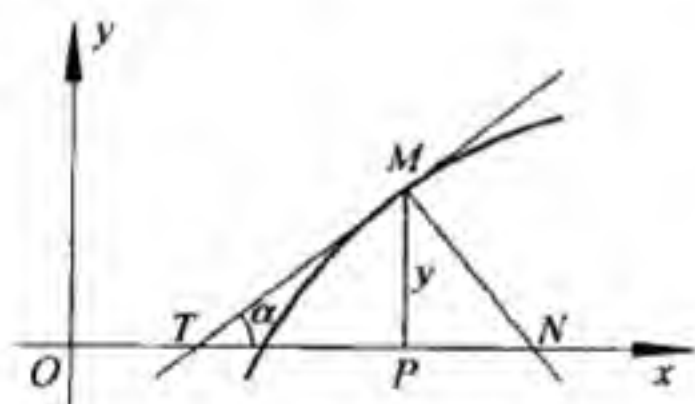


图 2.28

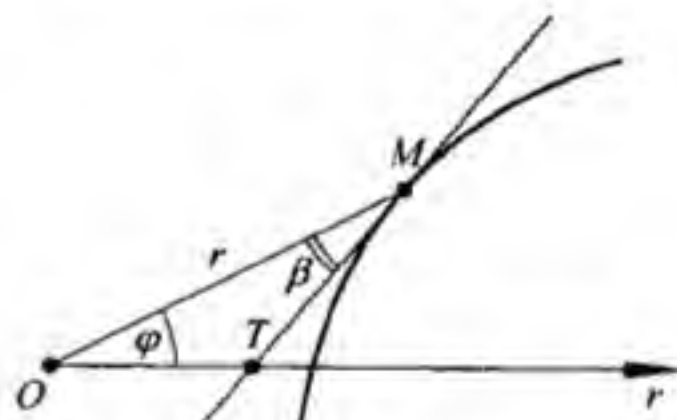


图 2.29

3° 切线与切点的径向量间的夹角 若 $r=f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程, β 为切线 MT 与切点 M 的径向量 OM 所成的角 (图 2.29), 则

$$\tan\beta = \frac{r}{r'}.$$

【1055】 写出曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$ 在下列各点处的切线和法线方程:

(1) $A(-1, 0)$; (2) $B(2, 3)$; (3) $C(3, 0)$.

解 由于

$$y' = \sqrt[3]{3-x} - \frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以, 在 A 点的切线方程为

$$y-0=y'|_{x=-1}(x+1), \quad \text{即 } y=\sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1), \quad \text{即 } y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为 $y-3=y'|_{x=2}(x-2)$, 即 $y=3$; 法线方程为 $x=2$.

在C点,由于 y' 为无穷,故切线方程为 $x=3$;法线方程为 $y=0$.

【1056】 在曲线 $y=2+x-x^2$ 上的哪些点,其切线(1)平行于 Ox 轴;(2)平行于第一象限角的平分线?

解 由于 $y'=1-2x$,所以,有

(1) 令 $y'=0$,则 $x=\frac{1}{2}$, $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$,故在点 $(\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$ 处其切线平行于 Ox 轴;

(2) 令 $y'=1$,则 $x=0$, $y=2$,故在点 $(0, 2)$ 处其切线平行于第一象限角的平分线.

【1057】 证明:抛物线

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$)彼此相等.

提示 先求出抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$;其次,再求得抛物线在点A及点B处切线的斜率分别为

$$k_A = y' \Big|_{x=x_1} \quad \text{及} \quad k_B = y' \Big|_{x=x_2}.$$

由此即易证明 $\alpha=\beta$.

解 如图2.30所示,显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$.由于 $y'=2ax-a(x_1+x_2)$,故在点A、B处切线的斜率分别为

$$k_A = y' \Big|_{x=x_1} = 2ax_1 - a(x_1+x_2) = a(x_1-x_2) = \tan \gamma = \tan(\pi-\beta), \quad (1)$$

$$k_B = y' \Big|_{x=x_2} = 2ax_2 - a(x_1+x_2) = a(x_2-x_1) = \tan \alpha. \quad (2)$$

由(2)式得

$$\tan(\pi-\alpha) = a(x_1-x_2). \quad (3)$$

由(1)式及(3)式证得 $\alpha=\beta$.

【1058】 在曲线 $y=2\sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$)上求出“曲线的坡度”(即 $|y'|$)大于1的区域.

解 由于 $y'=2\cos x$,故要 $|y'|>1$,只要 $|\cos x|>\frac{1}{2}$,也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad \text{及} \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi,$$

此即所求的区域.

【1059】 函数 $y=x$ 及 $y_1=x+0.01 \cdot \sin 1000\pi x$ 二者相差不大于0.01,这些函数的导数的差的最大值如何?作出相应的图像.

解 导数差的最大值

$$\max |y' - y'_1| = \max |10\pi \cdot \cos 1000\pi x| = 10\pi \approx 31.4.$$

由此可见,两函数相差甚微时(图2.31),其导数却可相差很大.如图2.32所示.

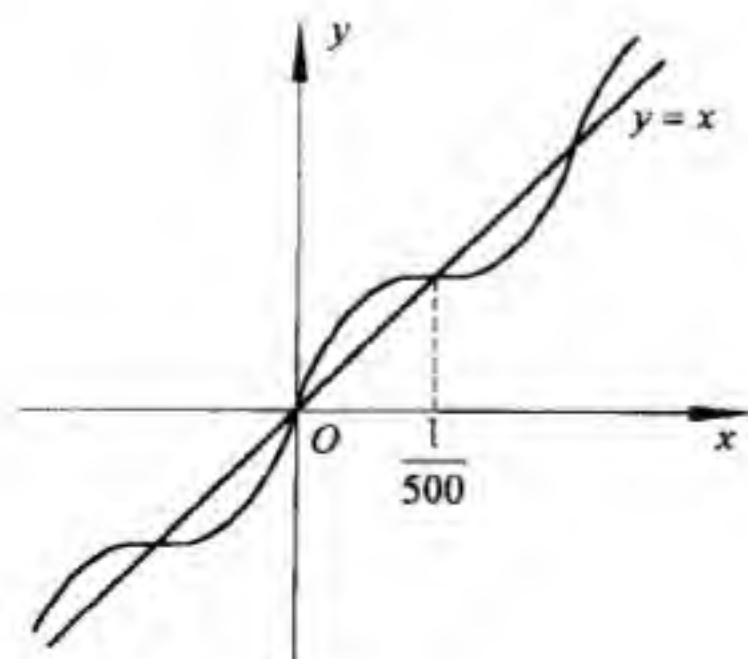


图 2.31

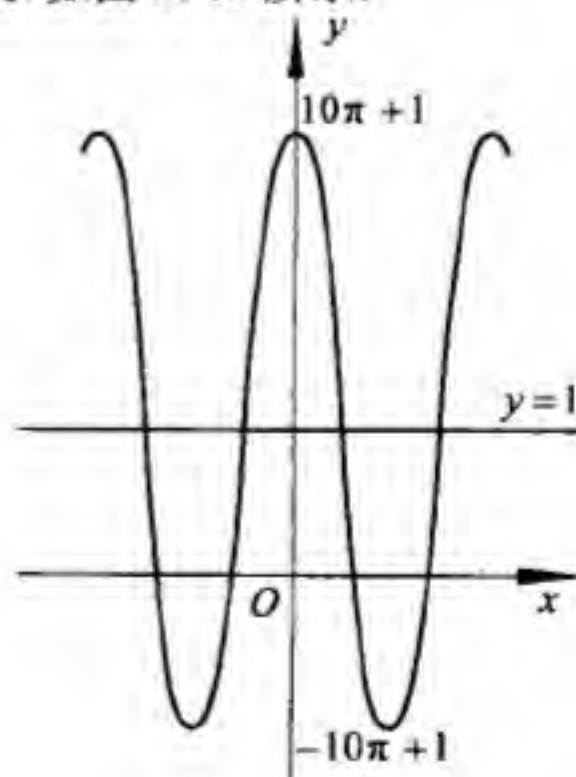


图 2.32

【1060】 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何?

解 曲线 $y=\ln x$ 与 Ox 轴的交点为 $(1,0)$, 设曲线与 Ox 轴的相交角为 α , 则

$$\tan \alpha = y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1,$$

故交角 α 为 45° .

【1061】 曲线 $y=x^2$ 及 $x=y^2$ 相交的角如何?

解 两曲线的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$. 由于导数为 $y'=2x$ 及 $y'=\frac{1}{2y}$, 故在 $(0,0)$ 点两曲线的交角显然为 90° .

在 $(1,1)$ 点两切线的斜率分别为 $k_1=2$ 及 $k_2=\frac{1}{2}$, 故其交角 θ 的正切为

$$\tan \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

于是, $\theta = \arctan \frac{3}{4} \approx 37^\circ$.

【1062】 曲线 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 相交的角如何?

解 先求交点, 解 $\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x \end{cases}$ 得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (k 为整数).

其次, 求两曲线在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处切线的斜率:

$$k_1 = (\sin x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_2 = (\cos x)' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi} = (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处, 交角 θ (今取锐角, 即 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 满足

$$\tan \theta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{(-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right| = 2\sqrt{2}.$$

于是, $\theta = \arctan 2\sqrt{2} \approx 70^\circ 32'$.

【1063】 如何选择参数 n , 可使曲线 $y=\arctan nx$ ($n>0$) 与 Ox 轴相交所成的角大于 89° ?

解 曲线 $y=\arctan nx$ 与 Ox 轴的交点为 $(k\pi, 0)$ (k 为整数). 不妨取 $0 \leq x < \pi$, 则交点为 $O(0,0)$. 交角的正切为

$$\tan \theta = \frac{n}{1+n^2 x^2} \Big|_{x=0} = n.$$

$\theta > 89^\circ$, 相当于 $\tan \theta > \tan 89^\circ = 57.29$, 即 $n > 57.29$.

【1064】 求出曲线: (1) $y=\sqrt{1-e^{-a^2 x^2}}$ 于点 $x=0$ 处, (2) $y=\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x=1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

提示 (1) $y'_-(0) = -|a|$, $y'_+(0) = |a|$. 于是, 夹角 θ 满足 $\tan \theta = \frac{2|a|}{|a|^2 - 1}$.

(2) $y'_-(1) = 1$, $y'_+(1) = -1$. 于是, 夹角为 90° .

解 (1) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2 x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2 x^2}-1}{-a^2 x^2}} \cdot a^2 \right] = -|a|,$$

$$y'_+(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1-e^{-a^2 x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{e^{-a^2 x^2}-1}{-a^2 x^2}} \cdot a^2 = |a|.$$

所以, 于点 $x=0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\tan\theta = \frac{2|a|}{|a|^2-1}, \quad \text{即 } \theta = 2\arctan \frac{1}{|a|}.$$

(2) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x} = 1,$$

同理, $y'_+(1) = -1$.

因此, 左、右切线的斜率互为负倒数, 所以, 夹角为 90° .

【1065】 证明: 对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ (a 及 m 为常数) 的切线与切点的径向量所成的角度为一常量.

证 设切线与切点的径向量所成的角为 β , 由于 $r = ae^{m\varphi}$, $r' = ame^{m\varphi}$, 所以, $\tan\beta = \frac{r'}{r} = \frac{1}{m}$, 它为一常数, 故 β 为一常量.

【1066】 求曲线 $y = ax^n$ 的次切线长, 由此给出作这曲线的切线的方法.

解 设在任一点 $M(x, y)$ 的次切线长为 l_T , 如图 2.33 中的 $|PT|$,

则

$$l_T = \left| \frac{y}{\tan\alpha} \right| = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{ax^n}{nax^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{n} \right|.$$

因此, 该曲线的切线可以这样作: 对于曲线 $y = ax^n$ 上任一点 $M(x, y)$, 由此点向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 再在 Ox 轴上取点 T , 使 $|PT| = \frac{|x|}{n}$ (当然, 只是在 P 的一侧取点 T , 若在此点 $yy' > 0$, 则在 P 点的左侧取 T ; 若在此点 $yy' < 0$, 则在 P 点的右侧取 T . 以后不再说明), 然后连接 MT , 则 MT 就是所求的切线.

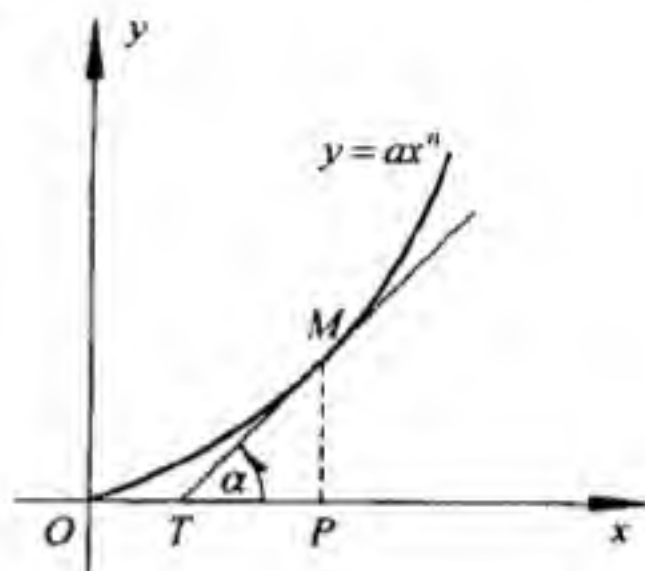


图 2.33

【1067】 证明: 对于抛物线 $y^2 = 2px$, (1) 次切线长等于切点的横坐标(绝对值)的两倍; (2) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证 (1) 次切线长为

$$l_T = |PT| = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{y}{\frac{p}{y}} \right| = \left| \frac{y^2}{p} \right| = \left| \frac{2px}{p} \right| = 2|x|,$$

所以, 次切线长为切点横坐标(绝对值)的两倍.

(2) 次法线长为 $l_N = |PN| = |yy'| = \left| y \cdot \frac{p}{y} \right| = |p|$, 所以, 次法线长为一常量.

由此, 抛物线的切线可以这样作: 由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x, y)$ 向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 由于 $yy' = p$, 故当 $p > 0$ ($p < 0$) 时, 在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T , 如图 2.34, 使 $|PT| = 2|x|$, 连接 MT , 此即所求的切线.

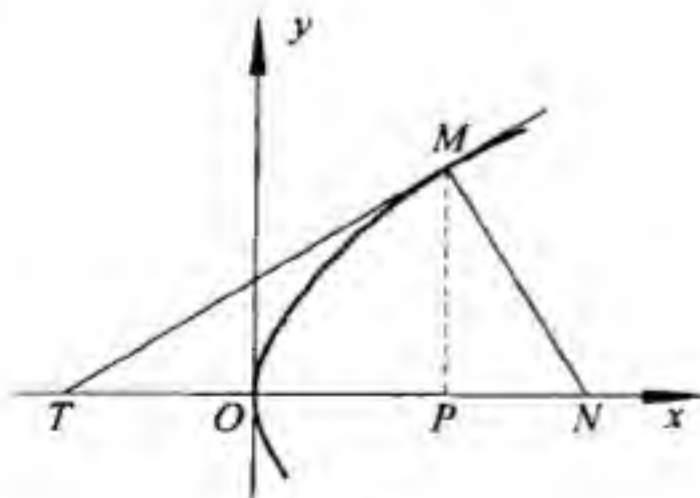


图 2.34

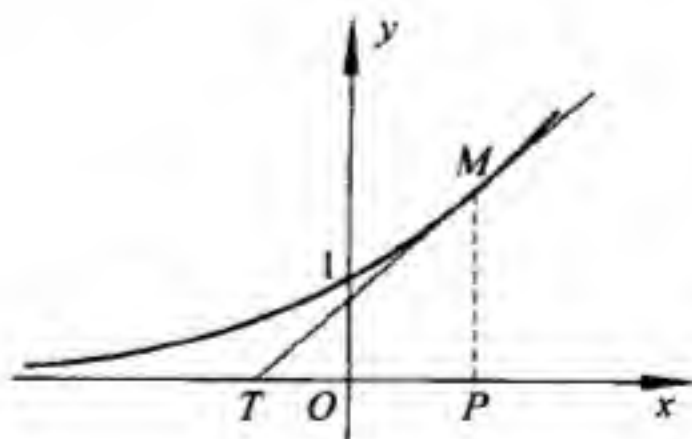


图 2.35

【1068】 证明: 指数曲线 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证 次切线长为 $l_T = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{a^x}{a^x \ln a} \right| = \frac{1}{|\ln a|}$, 从而 l_T 为常量.

由此,该曲线的切线可以这样作:对于曲线 $y=a^x$ 上任一点 $M(x,y)$ 向 Ox 轴作垂线,得交点 P . 由于当 $a>1$ 时 $yy'>0$, 当 $0<a<1$ 时 $yy'<0$, 故在 Ox 轴上点 P 的左侧(当 $a>1$ 时)或右侧(当 $0<a<1$ 时)取点 T , 使 $|PT|=\frac{1}{|\ln a|}$, 连接 MT , 此即所求的切线(图 2.35).

【1069】 求悬链线 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 上任意一点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线长.

解 法线长为

$$|MN|=|y|\sqrt{1+y'^2}\Big|_{(x_0, y_0)}.$$

由于 $y'=a\cdot\frac{1}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\operatorname{sh}\frac{x}{a}$, $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}=\left|\operatorname{ch}\frac{x}{a}\right|=\left|\frac{y}{a}\right|$,

故

$$|MN|=|y_0|\cdot\left|\frac{y_0}{a}\right|=\frac{y_0^2}{|a|}, \quad \text{即} \quad |MN|=\frac{y_0^2}{|a|} \quad (a\neq 0).$$

【1070】 证明:星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} (a>0)$ 的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证明思路 对于星形线上任一点 $(x_0, y_0) (x_0\neq 0)$ 处, 容易求得其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2} \quad \text{及} \quad l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是,切线介于坐标轴间部分的长为 $l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}$, 经计算得 $l=a$, 从而命题获证.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 $(x_0, y_0) (x_0\neq 0)$ 处, 其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2} \quad \text{及} \quad l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是,切线在两坐标轴间的部分长为 $l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}$. 由于

$$\begin{aligned} l_x^2+l_y^2 &= x_0^2+y_0^2+3x_0\sqrt[3]{x_0y_0^2}+3y_0\sqrt[3]{x_0^2y_0}=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{x_0^2y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2}+\sqrt[3]{y_0^2}) \\ &= x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{a^2x_0^2y_0^2}=(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})^3+y_0^2+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2-3a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2-3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2-3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2, \end{aligned}$$

故 $l=a$, 即星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} (a>0)$ 的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

【1071】 若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 Ox 轴相切, 则系数 a, b, c 间的关系如何?

提示 切点的横坐标满足 $y'=0$ 及 $y=0$. 由此可得 $b^2-4ac=0$.

解 由方程 $y=ax^2+bx+c$ 求得导数 $y'=2ax+b$. 要抛物线与 Ox 轴相切, 需 $y'=0$, 所以,

$$2ax+b=0,$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}; \quad (1)$$

另一方面,切点的横坐标满足:

$$ax^2+bx+c=0$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式,得

$$b^2 - 4ac = 0,$$

此即所求的 a, b, c 间的关系.

【1072】 在什么条件下,立方抛物线 $y = x^3 + px + q$ 与 Ox 轴相切?

提示 仿 1071 题,由 $y' = 0$ 及 $y = 0$ 可得 $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$.

解 由方程 $y = x^3 + px + q$ 求得 $y' = 3x^2 + p$. 要此曲线与 Ox 轴相切,必须满足

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, \\ x^3 + px + q = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

由(2)式得 $x(x^2 + p) = -q$, 两端平方,则

$$x^2(x^2 + p)^2 = q^2. \quad (3)$$

以(1)式代入(3)式,得

$$-\frac{p}{3} \cdot \left(-\frac{p}{3} + p\right)^2 = q^2, \quad \text{即} \quad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

此即所求的条件.

【1073】 当参数 a 为何值时,抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

解 按题意,我们有

$$(ax^2)' = (\ln x)' \quad \text{即} \quad x^2 = \frac{1}{2a} \quad (a \neq 0),$$

从而, $y = a \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$.

同时,由于在切点相切,其纵坐标也必须相等,所以

$$\ln x = \frac{1}{2}, \quad \text{即} \quad x = \sqrt{e}.$$

最后得到 $a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}$.

【1074】 证明:曲线

$$y = f(x) \quad [f(x) > 0] \quad \text{及} \quad y = f(x) \sin ax,$$

于公共点彼此相切,其中 $f(x)$ 为可微函数.

证 解曲线方程

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = f(x) \sin ax, \end{cases}$$

得 $\sin ax = 1$, $x = \frac{(4k+1)\pi}{2a}$ (k 为整数), 这就是两曲线交点的横坐标. 两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$k_1 = f' \left(\frac{(4k+1)\pi}{2a} \right),$$

$$k_2 = f' \left(\frac{(4k+1)\pi}{2a} \right) \sin \left(\frac{(4k+1)\pi}{2} \right) + a \cos \left(\frac{(4k+1)\pi}{2} \right) f \left(\frac{(4k+1)\pi}{2a} \right) = f' \left(\frac{(4k+1)\pi}{2a} \right).$$

从而, $k_1 = k_2$, 所以, 两曲线在公共点彼此相切.

【1075】 证明:双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网, 就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2x - 2yk_1 = 0$, 所以,

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足: $y + xk_2 = 0$, 所以,

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x}\right) = -1.$$

因此,两双曲线交成直角,故此两曲线族形成一正交网.

【1076】 证明:抛物线族 $y^2 = 4a(a-x)$ ($a > 0$) 及 $y^2 = 4b(b+x)$ ($b > 0$) 形成正交网.

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a-x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点 $y^2 = 4a(a-x)$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2yk_1 = -4a$, 所以,

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2 = 4b(b+x)$ 的切线的斜率 k_2 满足: $2yk_2 = 4b$, 所以

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \quad (1)$$

但点 $P(x, y)$ 同时在这两条抛物线上, 故

$$4a(a-x) = 4b(b+x),$$

于是, $x = a - b$, 且

$$y^2 = 4a(a - a + b) = 4ab. \quad (2)$$

以(2)式代入(1)式, 得知在交点处, 两切线的斜率满足

$$k_1 k_2 = -1,$$

故此两切线直交. 由此可知, 该两抛物线族形成正交网.

【1077】 写出曲线 $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ 在下列各点处的切线和法线的方程: (1) $t = 0$, (2) $t = 1$.

解 由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(1+t)$, 所以, 有

$$(1) \text{ 当 } t=0 \text{ 时, } x=0, y=0, \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}.$$

切线方程为 $y = \frac{3}{2}x$, 即 $3x - 2y = 0$; 法线方程为 $y = -\frac{2}{3}x$, 即 $2x + 3y = 0$.

$$(2) \text{ 当 } t=1 \text{ 时, } x=1, y=2, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为 $y - 2 = 3(x - 1)$, 即 $3x - y - 1 = 0$; 法线方程为 $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1)$, 即 $x + 3y - 7 = 0$.

【1078】 写出曲线 $x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$ 在下列各点的切线与法线的方程:

$$(1) t=0, \quad (2) t=1, \quad (3) t=\infty.$$

解 由于 $\frac{dy}{dx} = \frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}$, 所以, 有

$$(1) \text{ 当 } t=0 \text{ 时, } x=0, y=0, \frac{dy}{dx} = 1. \text{ 切线方程为 } y=x; \text{ 法线方程为 } y=-x.$$

$$(2) \text{ 当 } t=1 \text{ 时, } x=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为 $y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$, 即 $3x - y - 4 = 0$; 法线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$, 即 $x + 3y - 3 = 0$.

$$(3) \text{ 当 } t=\infty \text{ 时, } x=0, y=0, \frac{dy}{dx} = -1. \text{ (意即: 当 } t \rightarrow \infty \text{ 时, } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -1).$$

切线方程为 $y = -x$; 法线方程为 $y = x$.

【1079】 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

解 因为

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=t_0} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} \bigg|_{t=t_0} = \cot \frac{t}{2} \bigg|_{t=t_0} = \cot \frac{t_0}{2}.$$

于是, 切线方程为

$$y - a(1 - \cos t_0) = \cot \frac{t_0}{2} \cdot [x - a(t_0 - \sin t_0)],$$

化简得

$$y - 2a = (x - at_0) \cot \frac{t_0}{2}.$$

由此可知, 切线通过点 $(at_0, 2a)$, 其斜率为 $\cot \frac{t_0}{2}$. 如图 2.36

中所示, $\angle T'O'P = t_0$, 而

$$OT' = \widehat{T'P} = at_0, \quad T'T = 2a,$$

故 T 点的坐标为 $(at_0, 2a)$, 它在切线上. 其次, 连接 PT 及 PT' , 则 $PT' \perp PT$,

$$k_{PT} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \angle PTT'\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t_0}{2}\right) = \cot \frac{t_0}{2}.$$

这样, PT 就通过点 $(at_0, 2a)$, 且其斜率为 $\cot \frac{t_0}{2}$, 所以, 直线 PT 即为所求的切线. 于是摆线的切线可以这样作: 先连接切点与滚动的圆的接触点 (即点 P), 然后, 过 P 作其垂直线, 此即所求的切线.

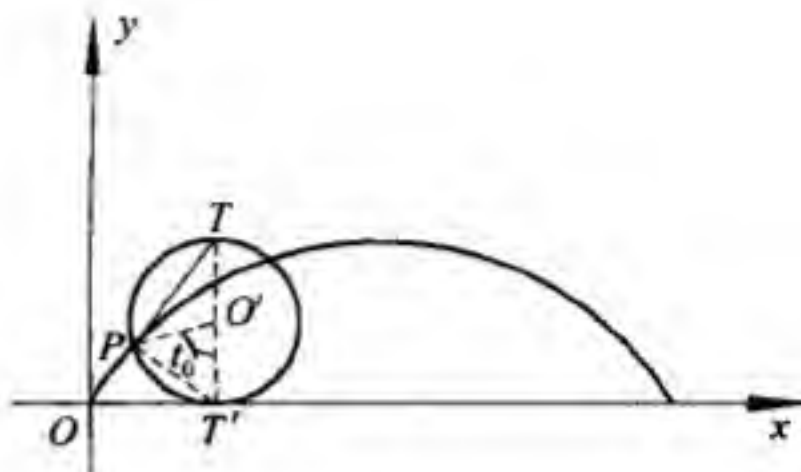


图 2.36

【1080】 证明: 曳物线 $\begin{cases} x = a\left(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t\right), \\ y = a \sin t \end{cases} \quad (a > 0, 0 < t < \pi)$ 有长度不变的切线.

证明思路 切线长为 $l = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}$, 而

$$y'_x = \frac{a \cos t}{a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)} = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

代入, 经计算得 $l = |a|$, 它是常量, 从而命题获证.

证 切线长 $= \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}$, 而 $\frac{dy}{dx} = \frac{a \cos t}{a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)} = \frac{\sin t}{\cos t}$,

所以,

$$\left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2} = \left| \frac{a \sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}} \right| \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = |a| |\cos t| \cdot \frac{1}{|\cos t|} = |a|,$$

这是一个常量, 故曳物线有长度不变的切线.

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程:

【1081】 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, \quad M(6, 6.4).$

解 由于 $y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y}$, 从而, 点 M 处的导数为 $y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5}$, 此即曲线在 M 点的切线的斜率.

所以, 切线方程为 $y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6)$, 即 $3x + 5y - 50 = 0$;

法线方程为 $y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6)$, 即 $5x - 3y - 10.8 = 0$.

【1082】 $xy + \ln y = 1, M(1, 1).$

解 先求 y' . 由于 $xy' + y + \frac{y'}{y} = 0$, 从而,

$$y' = -\frac{y^2}{xy+1}, \quad y' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2},$$

故切线方程为 $y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)$, 即 $x+2y-3=0$; 法线方程为 $y-1=2(x-1)$, 即 $2x-y-1=0$.

§ 4. 函数的微分

1° 函数的微分 若自变量为 x 的函数 $y=f(x)$ 之增量可表为以下形式:

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$, 则此增量的线性部分称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x)dx.$$

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的充分必要条件为存在有限的导数 $y' = f'(x)$, 这时我们有

$$dy = y' dx. \quad (1)$$

若自变量 x 为另一自变量的函数, 公式(1)于这种情形下仍然有效(一阶微分的不变性).

2° 函数的微小增量的估计 为了计算可微函数 $f(x)$ 的微小增量, 可利用公式

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$, 则当 $|\Delta x|$ 充分小时, 它的相对误差可以任意地小.

例如, 若自变量 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$, 则函数 $y=f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 可用下列公式近似地表示出来:

$$|\Delta y| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |[\ln f(x)]'\Delta x| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \right|.$$

【1083】 设: (1) $\Delta x=1$; (2) $\Delta x=0.1$; (3) $\Delta x=0.01$.

对于函数 $f(x)=x^3-2x+1$, 求: (1) $\Delta f(1)$; (2) $df(1)$, 并比较它们.

解 $\Delta f = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 - (1-2+1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2-2) \Big|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下:

		$\Delta f(1)$	$df(1)$
Δx		$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	Δx
(1)	$\Delta x=1$	5	1
(2)	$\Delta x=0.1$	0.131	0.1
(3)	$\Delta x=0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出, 当 Δx 值愈小时, $\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差就愈小.

【1084】 设运动方程由公式

$$x=5t^2,$$

给出, 其中 t 以 s 来度量, x 以 m 来度量. 若 (1) $\Delta t=1s$, (2) $\Delta t=0.1s$, (3) $\Delta t=0.001s$, 对于 $t=2s$ 的时刻, 求路线的增量 Δx 及路线的微分 dx , 并作比较.

解 $\Delta x = 5(2+\Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x'_t \Big|_{t=2} \cdot \Delta t = 10t \Big|_{t=2} \cdot \Delta t = 20\Delta t,$$

(1) 当 $\Delta t = 1\text{s}$ 时, $\Delta x = 25\text{m}$, $dx = 20\text{m}$;

(2) 当 $\Delta t = 0.1\text{s}$ 时, $\Delta x = 2.05\text{m}$, $dx = 2\text{m}$;

(3) 当 $\Delta t = 0.001\text{s}$ 时, $\Delta x = 0.020005\text{m}$, $dx = 0.02\text{m}$.

由上可以看出, 当 Δt 愈小时, $\Delta x - dx$ 就愈小.

求下列函数 y 的微分:

【1085】 $y = \frac{1}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{x^2}, \quad dy = -\frac{1}{x^2}dx \quad (x \neq 0).$

【1086】 $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$

解 $y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

【1087】 $y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$

解 $y' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2},$

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2} \quad (|x| \neq |a|).$$

【1088】 $y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$

【1089】 $y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0).$

解 $y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (|x| < |a|).$$

【1090】 求:

(1) $d(xe^x);$ (2) $d(\sin x - x \cos x);$ (3) $d\left(\frac{1}{x^3}\right);$

(4) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right);$ (5) $d(\sqrt{a^2 + x^2});$ (6) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right);$

(7) $d \ln(1-x^2);$ (8) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right);$ (9) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right].$

解 (1) $d(xe^x) = (xe^x)' dx = e^x(x+1)dx;$

(2) $d(\sin x - x \cos x) = (\sin x - x \cos x)' dx = x \sin x dx;$

(3) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4} dx \quad (x \neq 0);$

(4) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} dx = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx \quad (x > 0);$

(5) $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}};$

$$(6) \, d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx = \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1);$$

$$(7) \, d\ln(1-x^2) = -\frac{2x dx}{1-x^2} \quad (|x| < 1);$$

$$(8) \, d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{|x|}{x} dx = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$$

$$(9) \, d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right] = \left[\frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos x}\right] dx = \frac{dx}{\cos^3 x}$$

$(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数}).$

设 u, v, w 为 x 的可微函数, 求下列函数 y 的微分:

【1091】 $y = uvw.$

解 $dy = vwdu + uwdv + uvdw.$

【1092】 $y = \frac{u}{v^2}.$

解 $dy = \frac{v^2 du - 2uv dv}{v^4} = \frac{vdu - 2udv}{v^3} \quad (v \neq 0).$

【1093】 $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$

解 $dy = -\frac{1}{2(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} (2udu + 2v dv) = -\frac{udu + v dv}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (u^2 + v^2 > 0).$

【1094】 $y = \arctan \frac{u}{v}.$

解 $dy = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \cdot \frac{vdu - u dv}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 > 0, v \neq 0).$

【1095】 $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

解 $dy = \frac{2udu + 2v dv}{2(u^2 + v^2)} = \frac{udu + v dv}{u^2 + v^2} \quad (u^2 + v^2 > 0).$

【1096】 求: (1) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9);$ (2) $\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^+;$ (3) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)};$

(4) $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)};$ (5) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}.$

提示 (2) 由于 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 故不妨设 $x > 0$, 从而有

$$\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right).$$

解 (1) $\frac{d}{dx^3}(x^3 - 2x^6 - x^9) = \frac{d}{dx^3}[x^3 - 2(x^3)^2 - (x^3)^3] = 1 - 4x^3 - 3x^6;$

(2) 由于 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 故不妨设 $x > 0$, 则

$$\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2x}\sin x}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{2x^3},$$

显然, 上述结果对于 $x < 0$ 是正确的 ($x \neq 0$).

(3) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx} = -\cot x \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$

$$(4) \frac{d(\tan x)}{d(\cot x)} = \frac{d}{d(\cot x)} \left(\frac{1}{\cot x} \right) = -\frac{1}{\cot^2 x} = -\tan^2 x \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数});$$

$$(5) \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = -1 \quad (|x| < 1).$$

【1097】 有半径为 $R=100\text{cm}$ 及圆心角 $\alpha=60^\circ$ 的扇形. 若(1)其半径 R 增加 1cm ; (2)角 α 减小 $30'$, 则扇形面积的变化如何? 求出精确的和近似的解.

解 扇形面积 $A = \frac{1}{2}R^2\alpha$, 其增量

$$\Delta A = \frac{\alpha}{2}[(R+\Delta R)^2 - R^2] = \alpha R \Delta R + \frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2, \quad \text{或} \quad \Delta A = \frac{1}{2}R^2 \Delta \alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA = R\alpha dR, \quad \text{或} \quad dA = \frac{1}{2}R^2 d\alpha.$$

增量是精确的解, 微分是近似的解.

(1) 当 $R=100, \alpha=\frac{\pi}{3}, \Delta R=1$ 时,

$$\Delta A = \frac{\pi}{6}(200+1) = 105.2\text{cm}^2, \quad dA = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.7\text{cm}^2 \text{ (增加)}.$$

(2) 当 $\Delta \alpha = -\frac{\pi}{360}$ 时,

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) = -43.6\text{cm}^2, \quad dA = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360}\right) = -43.6\text{cm}^2 \text{ (减少)}.$$

【1098】 摆的振动周期(以 s 计算)按下式确定:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

其中 l 为摆长以 cm 计, $g=981\text{cm/s}^2$ 为重力加速度.

为了使周期 T 增大 0.05s , 对摆长 $l=20\text{cm}$ 的长度需作多少修改?

解 周期 T 对摆长 l 的微分

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = \frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将 $dT=0.05, g=981, l=20$ 代入上式, 即得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{3.1416} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23cm .

利用函数之微分代替函数的增量, 求下列各式之近似值:

【1099】 $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1, \Delta x = 0.02$, 则

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3}, \quad df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 0.0066.$$

于是,

$$\sqrt[3]{1.02} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) = 1 + 0.0066$$

即 $\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007$.

【1100】 $\sin 29^\circ$.

解 设 $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, 则 $\sin 29^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} = 0.4849$.

【1101】 $\cos 151^\circ$

解 设 $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, 则 $\cos 151^\circ \approx \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = -0.8748$.

【1102】 $\arctan 1.05$.

解 设 $f(x) = \arctan x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, 则

$$\arctan 1.05 \approx \arctan 1 + 0.05 \cdot \frac{1}{2} = 0.8104 (\text{弧度}) = 46^\circ 26'.$$

【1103】 $\lg 11$.

解 $\lg 11 = \lg 10 + \lg 1.1 = 1 + \lg 1.1$.

设 $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, 则

$$\lg 1.1 \approx \lg 1 + \frac{0.1}{\ln 10} = \frac{0.1}{2.3026} = 0.0434,$$

于是, $\lg 11 \approx 1.0434$.

【1104】 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0),$$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 之间的关系式 $A \ll B$ 表示 A 远小于 B).

利用这个公式近似地计算: (1) $\sqrt{5}$; (2) $\sqrt{34}$; (3) $\sqrt{120}$. 并与平方表中的数值比较.

证 设 $f(y) = \sqrt{y}$, $y_0 = a^2$, $\Delta y = x$, 则

$$\sqrt{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt{y_0} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \Delta y \quad (\text{当 } |\Delta y| \ll \sqrt{y_0} \text{ 时}).$$

于是, $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$ (当 $|x| \ll a$ 时).

$$(1) \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2.25, \text{查表: } \sqrt{5} = 2.24;$$

$$(2) \sqrt{34} = \sqrt{6^2 + 2} \approx 6 + \frac{2}{2 \cdot 6} = 5.833, \text{查表: } \sqrt{34} = 5.831;$$

$$(3) \sqrt{120} = \sqrt{11^2 + 1} \approx 11 + \frac{1}{2 \cdot 11} = 10.9546, \text{查表: } \sqrt{120} = 10.9545.$$

【1105】 证明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0),$$

其中 $|x| \ll a$. 利用此公式近似地计算:

$$(1) \sqrt[3]{9}; (2) \sqrt[4]{80}; (3) \sqrt[7]{100}; (4) \sqrt[10]{1000}.$$

证 设 $f(y) = \sqrt[n]{y}$, $y_0 = a^n$, $\Delta y = x$, 则

$$\sqrt[n]{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt[n]{y_0} + \frac{1}{n \sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}} \Delta y = a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (\text{当 } |x| \ll a \text{ 时}).$$

$$(1) \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 + 1} \approx 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} = 2.083, \text{查表: } \sqrt[3]{9} = 2.080;$$

$$(2) \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 + 1} \approx 3 + \frac{1}{4 \cdot 3^3} = 2.9907, \text{查表: } \sqrt[4]{80} = 2.9905;$$

$$(3) \sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 + 28} \approx 2 + \frac{28}{7 \cdot 2^6} = 1.938, \text{查表: } \sqrt[7]{100} = 1.931;$$

$$(4) \sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} + 24} \approx 2 + \frac{24}{10 \cdot 2^9} = 1.9953, \text{查表: } \sqrt[10]{1000} = 1.9953.$$

【1106】 正方形的边 $x = 2.4 \text{ m} \pm 0.05 \text{ m}$. 由此计算所得正方形的面积的相对误差和绝对误差如何?

解 正方形的面积 $A = x^2$. 于是, 面积的相对误差为

$$\delta_A = \left| \frac{\Delta A}{A} \right| \approx \left| \frac{2x\Delta x}{x^2} \right| = 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| = 2 \cdot \frac{0.05}{2.4} = 4.2\% ;$$

而绝对误差为

$$|\Delta A| = |2.45^2 - 2.4^2| = 0.24\text{m}^2.$$

【1107】 为了在 1% 的精度下计算出球的体积,问度量球半径 R 时所允许发生的相对误差如何?

解 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 从而,

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 dR = V \frac{3dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = 3 \left| \frac{dR}{R} \right|.$$

因而,半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V \leq \frac{1}{3} \cdot 0.01 = 0.33\%.$$

【1108】 为了确定重力加速度,可以利用摆的振动公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, 其中 l 为摆长, T 为振动周期. 当测量

(1) 摆长 l , (2) 周期 T 时, 相对误差 δ 如何影响 g 的值?

解 (1) $\delta_g = \left| \frac{dg}{g} \right| = \left| \frac{dl}{l} \right|$, 于是, $\delta_g = \delta_l$, 即 g 的相对误差等于摆长 l 的相对误差.

(2) $\delta_g = \left| \frac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l} \right| = 2 \left| \frac{dT}{T} \right|$, 于是, $\delta_g = 2\delta_T$, 即 g 的相对误差是周期 T 的相对误差的 2 倍.

【1109】 求数 $x(x>0)$ 的常用对数(以 10 为底)的绝对误差, 设此数的相对误差等于 δ .

解 设 $f(x) = \lg x$, 若数 δ 很小, 则有

$$\ln(1+\delta) \approx \delta.$$

因而, 所要求的绝对误差

$$|\lg(x+\Delta x) - \lg x| = \left| \lg\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \right| = |\lg(1+\delta)| = \frac{1}{\ln 10} \ln(1+\delta) \approx 0.43\delta.$$

【1110】 证明: 根据正切对数表求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$d(\lg \tan \varphi) = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \tan \varphi \cos^2 \varphi} = \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi \cos \varphi},$$

于是,

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| \cdot |d(\lg \tan \varphi)|; \quad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi},$$

于是,

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot \left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \cdot |d(\lg \sin \varphi)|. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式的右端, 由于假设确定 $\lg \sin \varphi$ 与 $\lg \tan \varphi$ 时, 具有同样的误差, 而 $\left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \geq 1 \geq |\cos \varphi|$, 故由(2)式确定的 $|d\varphi|$ 不比(1)式的 $|d\varphi|$ 小. 这就证明了求角度时用正切对数表更为精确.

§ 5. 高阶的导数和微分

1° 基本定义 函数 $y=f(x)$ 的高阶导数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n=2, 3, \dots).$$

若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f^{(n)}(x)$, 则简写为: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. 特别地, 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有各阶导数, 并且这些导数是连续的, 则使用记号: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

函数 $y=f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n=2, 3, \dots),$$

其中认为 $d^1 y = dy = y' dx$.

若 x 为自变量, 则认为:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

这时成立公式

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{及} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2° 基本公式:

$$\text{I. } (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$\text{II. } (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{III. } (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$\text{IV. } (x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$\text{V. } (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

3° 莱布尼茨公式 若函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 有 n 阶导数(n 阶可微), 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v, C_n^i$ 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

类似地对于微分 $d^n(uv)$ 得:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i} u d^i v,$$

其中认为 $d^0 u = u$ 及 $d^0 v = v$.

求 y'' , 设:

$$\text{【1111】 } y = x \sqrt{1+x^2}.$$

$$\text{解 } y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$y'' = \frac{4x \sqrt{1+x^2} - \frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\text{【1112】 } y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (|x| < 1).$$

【1113】 $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

【1114】 $y = \tan x$.

解 $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$ ($x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, k 为整数).

【1115】 $y = (1+x^2)\arctan x$.

解 $y' = 1 + 2x\arctan x$, $y'' = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$.

【1116】 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$y'' = \frac{2x}{(1-x^2)^2} + \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{(1-x^2)^3}$$

$$= \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (|x| < 1).$$

【1117】 $y = x \ln x$.

解 $y' = 1 + \ln x$, $y'' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$).

【1118】 $y = \ln f(x)$.

解 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $y'' = \frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$ ($f(x) > 0$).

【1119】 $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) + x \cdot \frac{1}{x}[\cos(\ln x) - \sin(\ln x)] = 2\cos(\ln x)$,

$$y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x} \quad (x > 0).$$

【1120】 设 $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

解 $y(0) = 1$.

又 $y' = e^{\sin x} [\cos x \cos(\sin x) - \cos x \sin(\sin x)]$. 于是, $y'(0) = e^0(1-0) = 1$.

而 $y'' = e^{\sin x} [\cos^2 x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) - \sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) + \sin x \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x)]$

$$= e^{\sin x} \{-2\cos^2 x \sin(\sin x) + \sin x [\sin(\sin x) - \cos(\sin x)]\},$$

于是, $y''(0) = e^0(0+0) = 0$.

设 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为二阶可微函数, 求 y'' , 设:

【1121】 $y = u^2$.

解 $y' = 2uu'$, $y'' = 2u'^2 + 2uu'' = 2(u'^2 + uu'')$.

【1122】 $y = \ln \frac{u}{v}$.

解 $y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$, $y'' = \frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2}$ ($uv > 0$)

【1123】 $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

解 $y' = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}}$,

$$y'' = \frac{(uu'' + u'^2 + vv'' + v'^2)\sqrt{u^2 + v^2} - \frac{(uu' + vv')^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2} = \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - v'u)^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2 + v^2 > 0).$

【1124】 $y = u^v \quad (u > 0).$

解 $y' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right),$

$$y'' = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right)^2 + u^v \left[v'' \ln u + \frac{u'v'}{u} + \frac{(u'v' + vu'')u - vu'^2}{u^2} \right]$$

$$= u^v \left[\left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right)^2 + v'' \ln u + \frac{2u'v'}{u} + \frac{v}{u^2} (uu'' - u'^2) \right].$$

设 $f(x)$ 为三阶可微函数, 求 y' 及 y'' . 设:

【1125】 $y = f(x^2).$

解 $y' = 2xf'(x^2),$

$$y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2),$$

$$y''' = 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2) = 12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2).$$

【1126】 $y = f\left(\frac{1}{x}\right).$

解 $y' = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right),$

$$y'' = \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y''' = -\frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{4}{x^3} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6} f'''(x)$$

$$= -\frac{1}{x^6} f'''(x) - \frac{6}{x^5} f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^4} f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).$$

【1127】 $y = f(e^x).$

解 $y' = e^x f'(e^x),$

$$y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x),$$

$$y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x).$$

【1128】 $y = f(\ln x).$

解 $y' = \frac{1}{x} f'(\ln x),$

$$y'' = -\frac{1}{x^2} f'(\ln x) + \frac{1}{x^2} f''(\ln x) = \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)],$$

$$y''' = -\frac{2}{x^3} [f''(\ln x) - f'(\ln x)] + \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - f''(\ln x)] = \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)]$$

$(x > 0).$

【1129】 $y = f[\varphi(x)],$ 其中 $\varphi(x)$ 是充分多次可微函数.

解 $y' = \varphi'(x) f'[\varphi(x)],$

$$y'' = \varphi'^2(x) f''[\varphi(x)] + \varphi''(x) f'[\varphi(x)],$$

$$y''' = \varphi'^3(x) f'''[\varphi(x)] + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''[\varphi(x)] + \varphi'''(x)f'[\varphi(x)].$$

【1130】 对于以下两种情形: (1) x 为自变量, (2) x 为中间变量, 求函数 $y = e^x$ 的 $d^2 y$.

解 (1) $dy = e^x dx, d^2 y = e^x dx^2;$

(2) $dy = e^x dx, d^2 y = e^x d^2 x + e^x dx^2.$

若 x 为自变量, 求 $d^2 y$, 设:

【1131】 $y = \sqrt{1+x^2}$.

解 $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$, $y' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, 于是, $d^2 y = \frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

【1132】 $y = \frac{\ln x}{x}$.

解 $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $y'' = \frac{2\ln x-3}{x^3}$, 于是, $d^2 y = \frac{2\ln x-3}{x^3} dx^2$ ($x>0$).

【1133】 $y = x^x$.

解 $y' = x^x(1+\ln x)$, $y'' = x^x \left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x} \right]$, 于是, $d^2 y = x^x \left[(1+\ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2$ ($x>0$).

令 u 及 v 为变量 x 的二阶可微函数, 求 $d^2 y$, 设:

【1134】 $y = uv$.

解 $dy = u dv + v du$,

$d^2 y = du dv + u d^2 v + dv du + v d^2 u = u d^2 v + 2 du dv + v d^2 u$.

【1135】⁺ $y = \frac{u}{v}$.

解 $dy = \frac{v du - u dv}{v^2}$,

$d^2 y = \frac{v^2 (dv du + v d^2 u - du dv - u d^2 v) - 2v dv (v du - u dv)}{v^4} = \frac{v (v d^2 u - u d^2 v) - 2 dv (v du - u dv)}{v^3}$

($v \neq 0$).

【1136】 $y = u^m v^n$ (m 及 n 为常数).

解 $dy = mu^{m-1} v^n du + nu^m v^{n-1} dv$,

$d^2 y = m(m-1)u^{m-2} v^n du^2 + mu^{m-1} (v^n d^2 u + n v^{n-1} du dv) + mnu^{m-1} v^{n-1} du dv$
 $+ n(n-1)u^m v^{n-2} dv^2 + nu^m v^{n-1} d^2 v$
 $= u^{m-2} v^{n-2} \{ [m(m-1)v^2 du^2 + 2mnu v du dv + n(n-1)u^2 dv^2] + uv(mv d^2 u + nud^2 v) \}.$

【1137】 $y = a^u$ ($a>0$).

解 $dy = a^u \ln a du$,

$d^2 y = a^u \ln^2 a \cdot du^2 + a^u \ln a \cdot d^2 u = a^u \ln a (\ln a \cdot du^2 + d^2 u)$ ($a>0$).

【1138】 $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.

解 $dy = \frac{u du + v dv}{u^2 + v^2}$,

$d^2 y = \frac{(u^2 + v^2)(du^2 + u d^2 u + dv^2 + v d^2 v) - 2(udu + v dv)^2}{(u^2 + v^2)^2}$
 $= \frac{(v^2 - u^2)du^2 - 4uv du dv + (u^2 - v^2)dv^2 + (u^2 + v^2)(u d^2 u + v d^2 v)}{(u^2 + v^2)^2}$ ($u^2 + v^2 > 0$).

【1139】 $y = \arctan \frac{u}{v}$.

解 $dy = \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2}$,

$d^2 y = \frac{(u^2 + v^2)(v d^2 u - u d^2 v) - 2(udu + v dv)(v du - u dv)}{(u^2 + v^2)^2}$
 $= \frac{(u^2 + v^2)(v d^2 u - u d^2 v) + 2uv(dv^2 - du^2) + 2(u^2 - v^2)du dv}{(u^2 + v^2)^2}$ ($v \neq 0$).

求以参数形式给出的函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}$, 设:

【1140】 $x=2t-t^2, y=3t-t^3$.

解 $y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3-3t^2}{2-2t} = \frac{3}{2}(t+1),$

$$y''_{x^2} = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2-2t} = \frac{3}{4(1-t)},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\frac{dy''_{x^2}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{4(1-t)^2}}{2-2t} = \frac{3}{8(1-t)^3} \quad (t \neq 1).$$

【1141】 $x=a\cos t, y=a\sin t$.

解 $y'_x = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\cot t,$

$$y''_{x^2} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{1}{a\sin^3 t},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\frac{3\cos t}{a\sin^4 t}}{-a\sin t} = -\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t} \quad (t \neq k\pi, k \text{ 为整数}).$$

【1142】 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

解 $y'_x = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot \frac{t}{2},$

$$y''_{x^2} = \frac{-\frac{1}{2\sin^2 \frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4 \frac{t}{2}},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\frac{\cos \frac{t}{2}}{2a\sin^5 \frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)} = \frac{\cos \frac{t}{2}}{4a^2\sin^7 \frac{t}{2}} \quad (t \neq 2k\pi, k \text{ 为整数}).$$

【1143】 $x=e^t \cos t, y=e^t \sin t$.

解 $y'_x = \frac{e^t(\sin t + \cos t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + t)}{\cos(\frac{\pi}{4} + t)} = \tan(\frac{\pi}{4} + t),$

$$y''_{x^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + t)}}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3(\frac{\pi}{4} + t)},$$

$$y'''_{x^3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}[-\cos^{-3}(\frac{\pi}{4} + t) + 3\cos^{-4}(\frac{\pi}{4} + t)\sin(\frac{\pi}{4} + t)]}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{e^{-2t}(2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2}\cos^5(\frac{\pi}{4} + t)}$$

$$(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数}).$$

【1144】 $x=f'(t), y=tf'(t)-f(t)$.

解 $y'_x = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$

$$y''_{x^2} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$y'''_{x^3} = -\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3} \quad (f''(t) \neq 0).$$

【1145】 设函数 $y=f(x)$ 充分多次可微. 求反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数 $x', x'', x''', x^{(4)}$ (设这些导数都存在).

解 $x' = \frac{1}{y'},$

$$x'' = -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dy} = -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3},$$

$$x''' = -\frac{y''' \cdot \frac{1}{y'} y'^3 - 3y'^2 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'}}{y'^6} = -\frac{y' y''' - 3y''^2}{y'^5},$$

$$\begin{aligned} x^{(4)} &= -\frac{y'^5 \left(\frac{y''}{y'} y''' + y^{(4)} - 6y'' y''' \cdot \frac{1}{y'} \right) - 5y'^4 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} (y' y''' - 3y''^2)}{y'^{10}} \\ &= -\frac{y'^2 y^{(4)} - 10y' y'' y''' + 15y''^3}{y'^7} \quad (y' \neq 0). \end{aligned}$$

求由下列隐函数给出的 $y=y(x)$ 的 y'_x, y''_{x^2} 及 y'''_{x^3} :

【1146】 $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y', y'' 及 y''' 等于什么?

解 $y' = -\frac{x}{y},$

$$y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3},$$

$$y''' = \frac{75y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在 $M(3,4)$ 点, 得 $y' = -\frac{3}{4}, \quad y'' = -\frac{25}{64}, \quad y''' = -\frac{225}{1024}.$

【1147】 $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p}{y^2} y' = -\frac{p^2}{y^3}, \quad y''' = \frac{3p^2}{y^4} y' = \frac{3p^3}{y^5} \quad (y \neq 0).$

【1148】 $x^2 - xy + y^2 = 1$.

解 对 x 求导, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \tag{1}$$

$$y' = \frac{2x-y}{x-2y}. \tag{2}$$

将(1)式两端再对 x 求导, 得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \tag{3}$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式, 得

$$y'' = \frac{6}{(x-2y)^3}. \tag{4}$$

将(3)式两端对 x 求导, 得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \tag{5}$$

将(2)式及(4)式代入(5)式,得 $y'' = \frac{54x}{(x-2y)^5} \quad (x \neq 2y)$.

求 y'_x 及 y''_{xx} , 设:

【1149】 $y^2 + 2\ln y = x^4$.

解 对 x 求导,得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \quad (1)$$

再对 x 求导,得

$$2y'^2 + 2yy'' + \frac{2y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式得

$$y' = \frac{2x^3 y}{1+y^2}, \quad y'' = \frac{2x^2 y}{(1+y^2)^3} [3(1+y^2)^2 + 2x^4(1-y^2)].$$

【1150】 $\sqrt{x^2+y^2} = ae^{\arctan \frac{y}{x}} \quad (a>0)$.

解 取对数得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) = \ln a + \arctan \frac{y}{x},$$

对 x 求导,得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2},$$

于是,

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

将上式对 x 求导,得

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x \cdot \frac{x+y}{x-y} - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

【1151】 设函数 $f(x)$ 当 $x \leq x_0$ 时有定义且二阶可微. 应当如何选择系数 a, b 及 c , 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

是二阶可微函数?

提示 注意 $F(x_0-0) = F(x_0+0) = F(x_0)$, $F'_-(x_0) = F'_+(x_0)$ 及 $F''_-(x_0-0) = F''_+(x_0+0)$.

解 按题设 $F'(x)$ 存在, 所以, $F(x)$ 在点 x_0 连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} F(x) = F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} [a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c] = f(x_0),$$

于是, $c = f(x_0)$. 其次, 由 $F'(x_0-0) = F'(x_0+0)$ 得

$$f'(x_0) = [2a(x-x_0) + b] \Big|_{x=x_0} = b,$$

再由 $F''_-(x_0-0) = F''_+(x_0+0)$ 得 $f''(x_0) = 2a$, 于是, $a = \frac{1}{2} f''(x_0)$.

【1152】 质点作直线运动的规律为 $s = 10 + 20t - 5t^2$. 求其运动的速度和加速度. 在 $t = 2$ 的时刻, 速度与加速度等于什么?

解 速度 $v = \frac{ds}{dt} = 20 - 10t$, $v \Big|_{t=2} = 0$; 而加速度 $w = \frac{d^2s}{dt^2} = -10$, $w \Big|_{t=2} = -10$.

【1153】 质点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 匀速运动, 运动一周的时间为 T . 若质点在时刻 $t = 0$ 位于点

$M_0(a, 0)$, 求质点 M 的速度和加速度在 Ox 轴上的投影 v 和 w .

解 设点 M 的坐标为 (x, y) , 由于 $\angle M_0OM = \frac{2\pi}{T}t$, 从而,

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T}t,$$

于是, 速度和加速度在 Ox 轴上的投影分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t, \quad w = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

【1154】 在重力场中, 质点 $M(x, y)$ 在竖直平面 Oxy 内以初速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛出. 建立运动方程(忽略空气阻力)并计算速度 v 、加速度 w 的大小及运动轨迹. 质点的最大上升高度和射程等于多少?

解 若不考虑空气的阻力, 则有

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

此即运动方程. 化为直角坐标方程, 得

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

即轨迹为一抛物线. 速度

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - g t)^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha},$$

而加速度

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} = \sqrt{0 + (-g)^2} = g.$$

又 $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$, 在最大高度处, $\frac{dy}{dx} = 0$. 此时

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

于是, 最大上升高度为

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

上式也可从 $\frac{dy}{dt} = 0$ 解出 $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, 再以 t 值代入 y 的表达式而得到. 在最大射程处有: $y = 0$. 于是,

$$x \tan \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0, \quad \text{解得} \quad x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

从而, 最大射程为 $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

【1155】 质点的运动方程为

$$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t, \quad y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t \quad (\omega \text{ 为常数}).$$

求运动轨迹、速度与加速度的大小.

解 由于

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \sin^2 \omega t + 9 \cos^2 \omega t - 24 \sin \omega t \cos \omega t + 9 \sin^2 \omega t + 16 \cos^2 \omega t + 24 \sin \omega t \cos \omega t \\ &= 25 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = 25. \end{aligned}$$

所以, 运动轨迹为一以原点为中心, 5 为半径的圆.

其次, 速度与加速度的大小分别为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(4\omega \cos \omega t + 3\omega \sin \omega t)^2 + (3\omega \cos \omega t - 4\omega \sin \omega t)^2} = 5|\omega|,$$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4\omega^2 \sin \omega t + 3\omega^2 \cos \omega t)^2 + (-4\omega^2 \cos \omega t - 3\omega^2 \sin \omega t)^2} = 5\omega^2. \end{aligned}$$

求下列指定阶的导数:

【1156】 $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, 求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式, 最高次数为 6 次, 因而,

$$y^{(6)} = 1 \cdot 2^2 \cdot 1^3 \cdot 6! = 4 \cdot 6! = 2880,$$

$$y^{(7)} = 0.$$

【1157】 $y = \frac{a}{x^m}$, 求 y'' .

解 $y' = -amx^{-m-1}$,

$$y'' = am(m+1)x^{-m-2},$$

$$y''' = -am(m+1)(m+2)x^{-m-3} = -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} \quad (x \neq 0).$$

【1158】 $y = \sqrt{x}$, 求 $y^{(10)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(10)} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}\right) \left(-\frac{9}{2}\right) \left(-\frac{11}{2}\right) \left(-\frac{13}{2}\right) \left(-\frac{15}{2}\right) \left(-\frac{17}{2}\right) x^{-\frac{19}{2}} \\ &= -\frac{17!!}{2^{10} x^9 \sqrt{x}} \quad (x > 0), \end{aligned}$$

其中 $17!! = 1 \cdot 3 \cdots 15 \cdot 17$.

【1159】 $y = \frac{x^2}{1-x}$, 求 $y^{(8)}$.

$$\text{解 } y = \frac{x^2-1+1}{1-x} = -(x+1) + \frac{1}{1-x},$$

$$y' = -1 + \frac{1}{(1-x)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad y''' = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}, \quad \dots, \quad y^{(8)} = \frac{8!}{(1-x)^9} \quad (x \neq 1).$$

【1160】 $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求 $y^{(100)}$.

解 $y = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}$, 利用莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(100)} &= \sum_{i=0}^{100} C_{100}^i (1+x)^{(i)} [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100-i)} = (1+x) [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(100)} + C_{100}^1 [(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(99)} \\ &= (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}} (1-x)^{-\frac{201}{2}} + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} (1-x)^{-\frac{199}{2}} \\ &= \frac{197!!(399-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}} \quad (x < 1). \end{aligned}$$

【1161】 $y = x^2 e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$.

$$\text{解 } y^{(20)} = x^2 (e^{2x})^{(20)} + 2xC_{20}^1 (e^{2x})^{(19)} + 2C_{20}^2 (e^{2x})^{(18)} = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).$$

【1162】 $y = \frac{e^x}{x}$, 求 $y^{(10)}$.

$$\text{解 } y^{(10)} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i e^x \left(\frac{1}{x}\right)^{(10-i)} = e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}, \text{ 其中 } A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (11-i) \text{ 及 } A_{10}^0 = 1.$$

【1163】 $y = x \ln x$, 求 $y^{(5)}$.

$$\text{解 } y' = 1 + \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x}, \quad \dots, \quad y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} \quad (x > 0).$$

【1164】 $y = \frac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(5)}$.

解 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2},$

$$y'' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = -\frac{3 - 2\ln x}{x^3},$$

$$y''' = -\frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(3 - 2\ln x)}{x^6} = \frac{11 - 6\ln x}{x^4},$$

$$y^{(4)} = \frac{-\frac{6}{x} \cdot x^4 - 4x^3(11 - 6\ln x)}{x^8} = -\frac{50 - 24\ln x}{x^5},$$

$$y^{(5)} = -\frac{-\frac{24}{x} \cdot x^5 - 5x^4(50 - 24\ln x)}{x^{10}} = \frac{274 - 120\ln x}{x^6} \quad (x > 0).$$

【1165】 $y = x^2 \sin 2x$, 求 $y^{(50)}$.

解 $y^{(50)} = x^2 (\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot (\sin 2x)^{(49)} + 2C_{50}^2 (\sin 2x)^{(48)}$
 $= 2^{50} x^2 \sin\left(2x + \frac{50}{2}\pi\right) + 100x \cdot 2^{49} \sin\left(2x + \frac{49}{2}\pi\right) + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2^{48} \sin\left(2x + \frac{48}{2}\pi\right)$
 $= 2^{50} \left(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1225}{2} \sin 2x\right).$

【1166】 $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 求 y'' .

解 $y'' = \cos 3x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)'' + C_3^1 (\cos 3x)' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)' + C_3^2 (\cos 3x)'' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\right)$
 $+ (\cos 3x)'' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$
 $= -\frac{28}{3^3} (-3)^3 \cdot \frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} + 3(-3 \sin 3x) \left(\frac{4}{3^2}\right) (-3)^2 \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}$
 $+ 3(-3^2 \cos 3x) \left(-\frac{1}{3}\right) (-3) \frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} + 3^3 \sin 3x \frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}$
 $= \frac{28 - 27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \cos 3x + \frac{27(1-3x)^2 - 36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} \sin 3x \quad (x \neq \frac{1}{3}).$

【1167】 $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$, 求 $y^{(10)}$.

提示 利用三角公式易得 $y = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x$.

解 利用三角函数和、差与其积的互化公式, 将 y 化简得

$$y = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

于是,

$$y^{(10)} = \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \sin\left(4x + \frac{10}{2}\pi\right) - \frac{1}{4} \cdot 6^{10} \sin\left(6x + \frac{10}{2}\pi\right) + \frac{1}{4} \cdot 2^{10} \sin\left(2x + \frac{10}{2}\pi\right)$$

$$= -2^{18} \sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10} \sin 6x - 2^8 \sin 2x.$$

【1168】 $y = x \operatorname{sh} x$, 求 $y^{(100)}$.

解 $y^{(100)} = x (\operatorname{sh} x)^{(100)} + C_{100}^1 (\operatorname{sh} x)^{(99)} = x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x.$

【1169】 $y = e^x \cos x$, 求 $y^{(4)}$.

解 $y' = e^x (\cos x - \sin x),$

$$y'' = e^x [(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)] = -2e^x \sin x,$$

$$y''' = -2e^x (\sin x + \cos x),$$

$$y^{(4)} = -2e^x [(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)] = -4e^x \cos x.$$

【1170】 $y = \sin^2 x \ln x$, 求 $y^{(6)}$,

解 $y = \frac{1 - \cos 2x}{2} \ln x = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \ln x$.

$$y^{(6)} = \frac{(-1)^5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} - \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot \ln x)^{(6)}$$

$$= -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x + \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x.$$

在下列各例中, 视 x 为自变量, 求指定阶的微分.

【1171】 $y = x^5$, 求 $d^5 y$.

解 $d^5 y = 5! dx^5 = 120 dx^5$.

【1172】 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, 求 $d^3 y$

解 $d^3 y = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) x^{-\frac{7}{2}} dx^3 = -\frac{15}{8x^3 \sqrt{x}} dx^3 \quad (x > 0).$

【1173】 $y = x \cos 2x$, 求 $d^{10} y$.

解 $d^{10} y = (x \cos 2x)^{(10)} dx^{10} = \left[2^{10} x \cos \left(2x + \frac{10\pi}{2} \right) + 10 \cdot 2^9 \cos \left(2x + \frac{9}{2} \pi \right) \right] dx^{10}$
 $= -1024(x \cos 2x + 5 \sin 2x) dx^{10}.$

【1174】 $y = e^x \ln x$, 求 $d^4 y$.

解 $d^4 y = (e^x \ln x)^{(4)} dx^4 = e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4.$

【1175】 $y = \cos x \operatorname{ch} x$, 求 $d^6 y$.

解 $d^6 y = (\cos x \operatorname{ch} x)^{(6)} dx^6 = 8 \sin x \operatorname{sh} x dx^6.$

设 u 为 x 的充分多次可微函数, 在下列各例中求指定阶的微分.

【1176】 $y = u^2$, 求 $d^{10} y$.

解 $d^{10} y = d^{10} (u \cdot u) = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i d^{10-i} u d^i u$

$$= u d^{10} u + 10 d^9 u du + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^8 u d^2 u + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^7 u d^3 u + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^6 u d^4 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (d^5 u)^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 u d^6 u$$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^7 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^2 u d^8 u + 10 du d^9 u + u d^{10} u$$

$$= 2u d^{10} u + 20 du d^9 u + 90 d^2 u d^8 u + 240 d^3 u d^7 u + 420 d^4 u d^6 u + 252 (d^5 u)^2.$$

【1177】 $y = e^u$, 求 $d^4 y$.

解 $dy = e^u du,$

$$d^2 y = e^u du^2 + e^u d^2 u,$$

$$d^3 y = e^u [(du^3 + du d^2 u) + d(du^2) + d^3 u] = e^u (du^3 + 3 du d^2 u + d^3 u),$$

$$d^4 y = e^u [(du^4 + 3 du^2 d^2 u + du d^3 u) + d(du^2 du) + 3 d(du d^2 u) + d^4 u]$$

$$= e^u (du^4 + 6 du^2 d^2 u + 3 d^2 u^2 + 4 du d^3 u + d^4 u).$$

【1178】 $y = \ln u$, 求 $d^3 y$.

解 $dy = \frac{1}{u} du,$

$$d^2 y = -\frac{1}{u^2} du^2 + \frac{1}{u} d^2 u,$$

$$d^3 y = \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{2}{u^2} du d^2 u - \frac{1}{u^2} d^2 u du + \frac{1}{u} d^3 u = \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{3}{u^2} du d^2 u + \frac{1}{u} d^3 u.$$

【1179】 视 x 为某个自变量的函数, 由函数 $y=f(x)$ 求 d^2y, d^3y 及 d^4y .

解 $dy=f'(x)dx,$

$$d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x,$$

$$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dx d^2x+f'(x)d^3x,$$

$$\begin{aligned} d^4y &= f^{(4)}(x)dx^4+3f'''(x)dx^2 d^2x+3f''(x)dx^2 d^2x+3f''(x)[(d^2x)^2+dx d^3x] \\ &\quad +f'''(x)dx d^3x+f'(x)d^4x \\ &= f^{(4)}(x)dx^4+6f'''(x)dx^2 d^2x+4f''(x)dx d^3x+3f''(x)(d^2x)^2+f'(x)d^4x. \end{aligned}$$

【1180】 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导数 y' 及 y'' , 但不假定 x 为自变量.

解 $y'=\frac{dy}{dx},$

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dx d^2y-dy d^2x}{dx^3}=\frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y'''=\frac{d\left(\frac{dx d^2y-dy d^2x}{dx^3}\right)}{dx}=\frac{dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix}-3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

【1181】 证明: 函数 $y=C_1 \cos x+C_2 \sin x$, 其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程 $y''+y=0$.

证 $y'=-C_1 \sin x+C_2 \cos x, y''=-C_1 \cos x-C_2 \sin x=-y$, 所以, $y''+y=0$.

【1182】 证明: 函数 $y=C_1 \operatorname{ch} x+C_2 \operatorname{sh} x$, 其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程 $y''-y=0$.

证 $y'=C_1 \operatorname{sh} x+C_2 \operatorname{ch} x, y''=C_1 \operatorname{ch} x+C_2 \operatorname{sh} x=y$, 所以, $y''-y=0$.

【1183】 证明: 函数 $y=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}$, 其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, λ_1 及 λ_2 为常数, 满足方程

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0.$$

证 $y'=C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 x}, y''=C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}$, 于是,

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y$$

$$=C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}-C_1\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}-C_1\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_1 x}-C_2\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x}-C_2\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_2 x}+C_1\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_1 x}+C_2\lambda_1\lambda_2 e^{\lambda_2 x}=0.$$

【1184】 证明: 函数 $y=x^n[C_1 \cos(\ln x)+C_2 \sin(\ln x)]$, 其中 C_1 及 C_2 为任意常数, n 为常数, 满足方程

$$x^2 y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0.$$

证 $y'=nx^{n-1}[C_1 \cos(\ln x)+C_2 \sin(\ln x)]+x^{n-1}[C_2 \cos(\ln x)-C_1 \sin(\ln x)],$

$$y''=x^{n-2}\{(n^2-n-1)[C_1 \cos(\ln x)+C_2 \sin(\ln x)]+(2n-1)[C_2 \cos(\ln x)-C_1 \sin(\ln x)]\},$$

于是,

$$x^2 y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y$$

$$=x^n\{(n^2-n-1)[C_1 \cos(\ln x)+C_2 \sin(\ln x)]+(2n-1)[C_2 \cos(\ln x)-C_1 \sin(\ln x)]\}$$

$$+(1-2n)x^n\{n[C_1 \cos(\ln x)+C_2 \sin(\ln x)]+[C_2 \cos(\ln x)-C_1 \sin(\ln x)]\}$$

$$+(1+n^2)x^n[C_1 \cos(\ln x)+C_2 \sin(\ln x)]=0.$$

【1185】 证明: 函数

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}}+C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}}+C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 C_1, C_2, C_3 及 C_4 为任意常数, 满足方程 $y^{(4)}+y=0$.

证 $y'=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_4}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y''=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_3}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_3}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{C_4}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_2\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_1\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(C_3\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-C_4\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$y^{(4)}=(y'')''=e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(-C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=-y.$$

于是, $y^{(4)}+y=0$.

【1186】 证明:若函数 $f(x)$ 有 n 阶导数, 则 $[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$.

证 每求一次导数, 均要乘以因子 $(ax+b)'=a$, 所以, $[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$.

【1187】 若 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 求 $P^{(n)}(x)$.

解 $P'(x)=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$,

$$P''(x)=a_0n(n-1)x^{n-2}+a_1(n-1)(n-2)x^{n-3}+\cdots+a_{n-2},$$

\vdots

$$P^{(n)}(x)=n!a_0.$$

求 $y^{(n)}$, 设:

【1188】 $y=\frac{ax+b}{cx+d}.$

提示 $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $y''=-\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$. 利用数学归纳法, 可证得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}} \quad (x\neq-\frac{d}{c}, c\neq 0).$$

解 $y'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2},$

$$y''=-\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3};$$

利用数学归纳法, 可证得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}} \quad (x\neq-\frac{d}{c}, c\neq 0).$$

事实上, 对于 $n=2$ 等式成立, 设对于 n 等式成立, 则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)}=\frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}=\frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立, 于是得证.

【1189】 $y=\frac{1}{x(1-x)}.$

解 $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}.$

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}=n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right] \quad (x\neq 0, x\neq 1).$$

【1190】 $y=\frac{1}{x^2-3x+2}.$

提示 $y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$

解 $y=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}.$

$$y^{(n)}=(-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right] \quad (x\neq 1, x\neq 2).$$

【1191】 $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$

解 $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right) \cdot (-2)^n (1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}} = \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} \quad (x < \frac{1}{2}).$

【1192】 $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$

提示 $y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

解 $y = \frac{(x+1)-1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{2}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots \left(-\frac{3n-5}{3}\right) (1+x)^{-\frac{2n-2}{3}} - \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots \left(-\frac{3n-2}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n+1}{3}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-5)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} [2(1+x) + (3n-2)] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)(3n+2x)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} \quad (n \geq 2; x \neq -1). \end{aligned}$$

【1193】 $y = \sin^2 x.$

提示 $y' = \sin 2x, y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)}.$

解 $y' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x,$

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) = -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

【1194】 $y = \cos^2 x.$

提示 仿 1193 题的解法.

解 $y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x,$

$$y^{(n)} = -(\sin 2x)^{(n-1)} = -2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) = 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

【1195】 $y = \sin^3 x.$

提示 $y = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$

解 $y = \sin x \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

【1196】 $y = \cos^3 x.$

提示 $y = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$

解 $y = \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos x (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cos 2x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) + \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

【1197】 $y = \sin ax \sin bx.$

提示 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x - \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x - \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right] - \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

【1198】 $y = \cos ax \cos bx.$

提示 仿 1197 题的解法.

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x + \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{(a-b)^n}{2} \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right] + \frac{1}{2}(a-b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

【1199】 $y = \sin ax \cos bx$.

提示 仿 1197 题的解法.

解 $y = \frac{1}{2} \sin(a+b)x + \frac{1}{2} \sin(a-b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2}(a+b)^n \sin\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right] + \frac{1}{2}(a-b)^n \sin\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

【1200】 $y = \sin^2 ax \cos bx$.

提示 $y = \frac{1}{2} \cos bx - \frac{1}{4} \cos(2a+b)x - \frac{1}{4} \cos(2a-b)x.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos bx (1 - \cos 2ax) = \frac{1}{2} \cos bx - \frac{1}{4} \cos(2a+b)x - \frac{1}{4} \cos(2a-b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} b^n \cos\left(bx + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{1}{4} (2a+b)^n \cos\left[(2a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right] - \frac{1}{4} (2a-b)^n \cos\left[(2a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

【1201】 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

提示 $y = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$

解 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$

$$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos\left(4x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

【1202】 $y = x \cos ax$.

解 $y^{(n)} = x(\cos ax)^{(n)} + n(\cos ax)^{(n-1)} = a^n x \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) + na^{n-1} \cos\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$
 $= a^n x \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) + na^{n-1} \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$

【1203】 $y = x^2 \sin ax$.

解 $y^{(n)} = a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) + 2na^{n-1} x \sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right) + n(n-1)a^{n-2} \sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right)$
 $= a^n \left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2}\right] \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right) - 2na^{n-1} x \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$

【1204】 $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

解 $y^{(n)} = (-1)^n (x^2 + 2x + 2)e^{-x} + 2(-1)^{n-1} (x+1)e^{-x} \cdot n + (-1)^{n-2} n(n-1)e^{-x}$
 $= (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x + (n-1)(n-2)].$

【1205】 $y = \frac{e^x}{x}$.

解 $y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = e^x \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}.$

【1206】 $y = e^x \cos x$.

解 $y' = e^x (\cos x - \sin x) = 2^{\frac{1}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}} e^x \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right] = 2^{\frac{3}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得 $y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$

【1207】⁺ $y = e^x \sin x$.

提示 仿 1206 题的解法

解 $y' = e^x (\sin x + \cos x) = 2^{\frac{1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$$y'' = 2^{\frac{1}{2}} e^x \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right] = 2^{\frac{1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得 $y^{(n)} = 2^{\frac{1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

【1208】 $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}$.

提示 $y' = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx}$, $y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{b}{a+bx}\right)^{(n-1)} + \left(\frac{b}{a-bx}\right)^{(n-1)}$.

解 $y' = \frac{b}{a+bx} + \frac{b}{a-bx}$,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{(-1)^{n-1} b^n (n-1)!}{(a+bx)^n} + \frac{b^n (n-1)!}{(a-bx)^n} \\ &= \frac{(n-1)! b^n}{(a^2 - b^2 x^2)^n} [(a+bx)^n + (-1)^{n-1} (a-bx)^n] \quad \left(|x| < \left|\frac{a}{b}\right|\right). \end{aligned}$$

【1209】 $y = e^{ax} P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

解 $y^{(n)} = e^{ax} [a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x)]$.

【1210】 $y = x \operatorname{sh} x$.

解 $y^{(n)} = x(\operatorname{sh} x)^{(n)} + n(\operatorname{sh} x)^{(n-1)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{2} [e^x - (-1)^n e^{-x}] + \frac{n}{2} [e^x - (-1)^{n-1} e^{-x}] = \frac{1}{2} [(x+n)e^x - (-1)^n (x-n)e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) - (-1)^n (x-n)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)] \\ &= \frac{1}{2} \{ [(x+n) - (-1)^n (x-n)] \operatorname{ch} x + [(x+n) + (-1)^n (x-n)] \operatorname{sh} x \}. \end{aligned}$$

求 $d^n y$, 设:

【1211】 $y = x^n e^x$.

解 $d^n y = y^{(n)} dx^n = e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} + \cdots + n! \right] dx^n$.

【1212】 $y = \frac{\ln x}{x}$.

解 $d^n y = y^{(n)} dx^n = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} \ln x + n \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} + C_n^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)} + \cdots + \frac{1}{x} (\ln x)^{(n)} \right] dx^n$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] dx^n \quad (x > 0).$$

【1213】 证明等式: (1) $[e^{ax} \sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx+c+n\varphi)$

及 (2) $[e^{ax} \cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax} (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx+c+n\varphi)$,

其中 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

证明思路 (1) 注意到

$$\begin{aligned} [e^{ax} \sin(bx+c)]' &= e^{ax} [a \sin(bx+c) + b \cos(bx+c)] \\ &= \sqrt{a^2+b^2} e^{ax} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(bx+c) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(bx+c) \right] \\ &= (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin(bx+c+\varphi), \end{aligned}$$

其中 $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

同法求得 $[e^{ax} \sin(bx+c)]'' = (a^2+b^2)^{\frac{2}{2}} e^{ax} \sin(bx+c+2\varphi)$, 利用数学归纳法, 命题即可获证.

(2)仿(1)的证法.

证 (1) $[e^{ax} \sin(bx+c)]' = e^{ax} [a \sin(bx+c) + b \cos(bx+c)]$

$$= \sqrt{a^2+b^2} e^{ax} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(bx+c) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(bx+c) \right]$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} e^{ax} \sin(bx+c+\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $[e^{ax} \sin(bx+c)]'' = (a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} e^{ax} \sin(bx+c+2\varphi)$, ...

利用数学归纳法可证得

$$[e^{ax} \sin(bx+c)]^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx+c+n\varphi).$$

(2) 同理可证

$$[e^{ax} \cos(bx+c)]^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(bx+c+n\varphi).$$

【1214】求 $y^{(n)}$, 设:

(1) $y = \operatorname{ch} x \cos bx$; (2) $y = \operatorname{ch} x \sin bx$; (3) $y = \operatorname{sh} x \cos bx$; (4) $y = \operatorname{sh} x \sin bx$.

提示 注意 $\operatorname{ch} x$ 及 $\operatorname{sh} x$ 的定义, 并利用 1213 题(2)的结果.

解 (1) $y = \frac{1}{2} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{2} e^{-ax} \cos bx$,

利用 1213 题(2)的结果, 得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2} (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} [e^{ax} \cos(bx+n\varphi) + e^{-ax} \cos(bx+n\pi-n\varphi)] \\ &= \frac{1}{2} (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ e^{ax} \left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(n\varphi-\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{-ax} \left[\cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) + \sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \right] \right\} \\ &= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2} \cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2} \sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \right\} \\ &= (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \operatorname{ch} x \cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) - \sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \operatorname{sh} x \sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \right]. \end{aligned}$$

同样方法可求得:

$$(2) y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \operatorname{ch} x \sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) + \sin\left(n\varphi-\frac{n}{2}\pi\right) \operatorname{sh} x \cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \right];$$

$$(3) y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\sin n\varphi \operatorname{ch} x \sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) + \cos n\varphi \operatorname{sh} x \cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \right],$$

$$(4) y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} \left[-\sin n\varphi \operatorname{ch} x \cos\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) + \cos n\varphi \operatorname{sh} x \sin\left(bx+\frac{n}{2}\pi\right) \right],$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

【1215】将函数 $f(x) = \sin^{2p} x$, 其中 p 为正整数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

提示 令 $t = \cos x + i \sin x$.

解 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则 $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$ 其中 \bar{t} 为 t 的共轭复数. 于是,

$$\sin^{2p} x = \frac{1}{(2i)^{2p}} (t - \bar{t})^{2p} = \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k t^{2p-k} (-1)^k \bar{t}^k$$

$$= (-1)^p \frac{1}{(2i)^{2p}} C_{2p}^p + \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k \cos(2p-2k)x.$$

所以,

$$\begin{aligned} (\sin^{2p} x)^{(n)} &= \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k (2p-2k)^n \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right]. \end{aligned}$$

【1216】 设: (1) $f(x) = \sin^{2p+1} x$; (2) $f(x) = \cos^{2p} x$; (3) $f(x) = \cos^{2p+1} x$, 其中 p 为正整数, 求 $f^{(n)}(x)$.

提示 仿 1215 题的解法.

解 (1) 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则 $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, 所以,

$$\begin{aligned} \sin^{2p+1} x &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k t^{2p+1-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^k [\cos(2p+1-2k)x + i \sin(2p+1-2k)x] \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} 2^{-2p} C_{2p+1}^k \sin(2p+1-2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_{2p+1}^k \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} \sin\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

类似 1215 题及本题(1)的方法, 可求得:

$$(2) f^{(n)}(x) = (\cos^{2p} x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right];$$

$$(3) f^{(n)}(x) = (\cos^{2p+1} x)^{(n)} = \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

【1217】 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right)$$

证明:

$$\left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x].$$

提示 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式:

$$x+i = r(\cos\theta + i \sin\theta), \quad x-i = r(\cos\theta - i \sin\theta),$$

其中 $r = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \operatorname{arccot} x$. 并利用棣莫弗公式.

证 将复数 $x+i$ 及 $x-i$ 化成下列形式:

$$x+i = r(\cos\theta + i \sin\theta), \quad x-i = r(\cos\theta - i \sin\theta),$$

其中 $r = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \operatorname{arccot} x$.

于是,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^{(n)} &= \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{1}{x-i} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+i} \right)^{(n)} \right] = \frac{1}{2i} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} [(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \{ r^{n+1} [\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta] - r^{n+1} [\cos(n+1)\theta - i \sin(n+1)\theta] \} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} r^{n+1} \sin(n+1)\theta = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x], \end{aligned}$$

所以, $\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arccot} x]$.

【1218】 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 n 阶导数.

提示 注意 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 并利用 1217 题的结果.

解 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 利用 1217 题的结果, 得

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin[n \operatorname{arccot} x] = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).$$

求 $f^{(n)}(0)$, 设:

【1219】 (1) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; (2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (1) $f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right)$.

于是, $f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{2^{n+1} n!}{(1-2x)^{n+1}} \right]$. 所以, $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{3} [(-1)^n + 2^{n+1}]$.

(2) $f(x) = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以,

$$f^{(n)}(0) = \frac{(2n-3)!!}{2^n} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}} \quad (n > 1).$$

【1220】 (1) $f(x) = x^2 e^{ax}$; (2) $f(x) = \arctan x$; (3) $f(x) = \arcsin x$.

提示 (2) 利用 1218 题的结果.

(3) 先证 $(1-x^2)y'' - xy' = 0$, 再对上式应用莱布尼茨公式.

解 (1) $f^{(n)}(x) = x^2 a^n e^{ax} + 2nxa^{n-1}e^{ax} + n(n-1)a^{n-2}e^{ax}$, $f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2}$;

(2) 利用 1218 题的结果, 得 $f^{(2k)}(0) = 0$ 及 $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)! \quad (k=0, 1, 2, \dots)$;

(3) $y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'' = f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

若以添加下标“0”表示在 $x=0$ 时的导数值, 则得

$$y'_0 = f'(0) = 1, \quad y''_0 = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

对上式应用莱布尼茨公式, 得

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0.$$

在上式中, 令 $x=0$, 则有

$$y_0^{(n+2)} - n(n-1)y_0^{(n)} - ny_0^{(n)} = 0, \quad \text{即} \quad y_0^{(n+2)} = n^2 y_0^{(n)}.$$

由于 $y''_0 = 0$, 故

$$y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots);$$

又由于 $y'_0 = 1$, 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) = (2k-1)^2 y_0^{(2k-1)} = (2k-1)^2 (2k-3)^2 y_0^{(2k-3)} = \dots \\ &= [1 \cdot 3 \cdots (2k-1)]^2 = [(2k-1)!!]^2 \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

【1221】 (1) $f(x) = \cos(\arcsin x)$; (2) $f(x) = \sin(\arcsin x)$.

提示 (1) 先证 $(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$, 再对上式应用莱布尼茨公式. (2) 同(1).

解 (1) $y'=f'(x)=-\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\arcsin x)$,

$$y''=-\frac{m^2}{1-x^2}\cos(\arcsin x)-\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\arcsin x).$$

于是,

$$y'_0=f'(0)=0, \quad y''_0=f''(0)=-m^2,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0.$$

对上式应用莱布尼茨公式, 得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}+m^2y^{(n)}=0.$$

令 $x=0$, 即得

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于 $y'_0=0$, 故 $y_0^{(2k-1)}=f^{(2k-1)}(0)=0$ ($k=1, 2, \dots$); 又由于 $y''_0=-m^2$, 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k)} &= f^{(2k)}(0) = -[m^2 - (2k-2)^2]y_0^{(2k-2)} = \{-[m^2 - (2k-2)^2]\} \{-[m^2 - (2k-4)^2]\} y_0^{(2k-4)} \\ &= \dots \\ &= (-1)^{k-1} [m^2 - (2k-2)^2] [m^2 - (2k-4)^2] \dots (m^2 - 2^2) y_0'' \\ &= (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \dots [m^2 - (2k-2)^2] \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

(2) $y'=f'(x)=\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(\arcsin x)$,

$$y''=f''(x)=-\frac{m^2}{1-x^2}\sin(\arcsin x)+\frac{mx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\cos(\arcsin x).$$

于是,

$$y'_0=f'(0)=m, \quad y''_0=f''(0)=0,$$

并且有

$$(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0,$$

这与本题(1)所得的方程是一样的, 因而也有与(1)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)}+(m^2-n^2)y_0^{(n)}=0.$$

由于 $y''_0=0$, 故 $y_0^{(2k)}=f^{(2k)}(0)=0$ ($k=1, 2, \dots$); 又由于 $y'_0=m$, 故

$$y_0^{(2k+1)}=f^{(2k+1)}(0)=-[m^2-(2k-1)^2]y_0^{(2k-1)}=\dots=(-1)^k m(m^2-1^2)\dots[m^2-(2k-1)^2] \quad (k=1, 2, \dots).$$

【1222】 (1) $f(x)=(\arctan x)^2$; (2) $f(x)=(\arcsin x)^2$.

提示 (2) 先证 $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-2=0$, 再对上式应用莱布尼茨公式.

解 (1) 仍以下标带“0”者表示在 $x=0$ 时的导数值, 应用莱布尼茨公式及 1220 题(2)的结果, 即得

$$f^{(2k-1)}(0)=(\arctan x \cdot \arctan x)_0^{(2k-1)}=0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

及

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (\arctan x \arctan x)_0^{(2k)} = \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^{(i)} (\arctan x)_0^{(i)} (\arctan x)_0^{(2k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\arctan x)_0^{(2i+1)} (\arctan x)_0^{(2k-2i-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)! (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)! (2k-2i-1)!} (2i)! (2k-2i-2)! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k-1} (2k)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)} \\
&= (-1)^{k-1} (2k)! \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k-2i-1} \right) \right] \\
&= (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2(k-i)-1} \\
&= (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1} \right) \quad (k=1, 2, \cdots).
\end{aligned}$$

$$(2) f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \text{ 或 } \sqrt{1-x^2} f'(x) = 2 \arcsin x,$$

对上式两边再求导,得

$$\sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) - 2 = 0.$$

应用莱布尼茨公式,得

$$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - 2nx f^{(n+1)}(x) - n(n-1) f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0.$$

在上式中令 $x=0$, 即得

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0.$$

由于 $f'(0)=0$, 故

$$f^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots),$$

又由于 $f''(0)=2$, 故

$$f^{(2k)}(0) = (2k-2)^2 (2k-4)^2 \cdots 2^2 f''(0) = 2^{(2k-1)} [(k-1)!]^2 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

【1223】 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻区内有 $(n-1)$ 阶的连续导数, 求 $f^{(n)}(a)$.

提示 由莱布尼茨公式求得 $f^{(n-1)}(x)$, 再由导数定义即易得 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼茨公式,得

$$\begin{aligned}
f^{(n-1)}(x) &= (x-a)^n \varphi^{(n-1)}(x) + C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + \cdots + C_{n-1}^{n-2} n(n-1) \cdots 3(x-a)^2 \varphi'(x) \\
&\quad + n! (x-a) \varphi(x).
\end{aligned}$$

于是, $f^{(n-1)}(a) = 0$.

按导数定义, 即得

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \rightarrow a} [(x-a)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x) + C_{n-1}^1 n(x-a)^{n-2} \varphi^{(n-2)}(x) + \cdots + C_{n-1}^{n-2} n(n-1) \cdots 3(x-a) \varphi'(x) \\
&\quad + n! \varphi(x)] \\
&= n! \varphi(a).
\end{aligned}$$

【1224】 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(n 为正整数), 于点 $x=0$ 有一直到 n 阶的导数, 而无 $(n+1)$ 阶导数.

证 由莱布尼茨公式, 当 $x \neq 0$ 时得

$$f^{(m)}(x) = \left(x^{2n} \sin \frac{1}{x} \right)^{(m)} = \sum_{i=0}^m C_m^i (x^{2n})^{(m-i)} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)}.$$

首先指出, 有

$$\left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} \left[a_k x^{-(i+k)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right] + (-x^{-2})^i \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right) \quad (x \neq 0),$$

其中 a_k 是某些常数, 现用数学归纳法予以证明:

当 $i=1$ 时, 命题显然成立;

设当 $i=N$ 时, 命题成立, 要证命题对 $i=N+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x}\right)^{(N+1)} &= \sum_{k=1}^{N+1} a_k \left[x^{-(N+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right]' + \left[(-x^{-2})^N \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2}\right) \right]' \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} a_k \left[-(N+k)x^{-(N+1+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) + x^{-(N+k)} (-x^{-2}) \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k+1}{2}\pi\right) \right] \\ &\quad + \left[N(-x^{-2})^{N-1} (2x^{-3}) \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2}\right) + (-x^{-2})^{N+1} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{(N+1)-1} \left[b_k x^{-(N+1+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right] + (-x^{-2})^{N+1} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right), \end{aligned}$$

其中 b_k 是一些适当的常数, 于是, 命题对于一切正整数均成立.

因而, 我们有

$$f^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^m C_m^i \frac{(2n)!}{(2n-m+i)!} x^{2n-m+i} \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_k x^{-(i+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) + (-x^{-2})^i \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2}\right) \right] \quad (x \neq 0),$$

于是,

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m x^{2(n-m)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{m\pi}{2}\right) + O(|x|^{2(n-m)+1}) \quad (x \rightarrow 0) \quad (m=1, 2, \dots, n). \quad (*)$$

由于

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-1} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

故由(*)式, 得知

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-x^{2n-3} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right) + O(|x|^{2n-2}) \right] = 0,$$

一直推下去, 得

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-1)^{n-1} x \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + O(|x|^2) \right] = 0.$$

但

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2}\right) + O(1) \right],$$

在 $x=0$ 近旁, $\frac{(-1)^n}{x} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2}\right)$ 无界且振荡, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2}\right) + O(1) \right]$$

不存在, 因而 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在. 证毕.

【1225】 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微的. 作出此函数的图像.

证 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出, 对于任何正整数 n , 均有

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式. 现用数学归纳法证明之:

当 $n=1$ 时, 命题显然成立;

设当 $n=k$ 时命题成立, 即 $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right)$, $P_k(t)$ 是关于 t 的某多项式. 要证命题对于 $n=k+1$

时也成立. 事实上, 有

$$f^{(k+1)}(x) = \left[e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right) \right]' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} P_k\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P_k'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \left\{ 2 \left(\frac{1}{x} \right)^3 P_k \left(\frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} \right)^2 P'_k \left(\frac{1}{x} \right) \right\} = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{k+1} \left(\frac{1}{x} \right),$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式.

于是, 命题对于一切正整数 n 均成立.

现在, 证明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是无穷次可微的. 首先, 注意到

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(2). 仍用此法, 设 $f^{(n)}(0) = 0$, 则可证明 $f^{(n+1)}(0) = 0$. 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ P_n^* \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} = 0, \end{aligned}$$

($P_n^*(t) = t P_n'(t)$ 也是 t 的多项式).

由数学归纳法可知, $f^{(n)}(0) = 0$ 对于一切正整数 n 均成立, 即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无穷次可微, 且其各阶导数为零. 图像如图 2.37 所示.

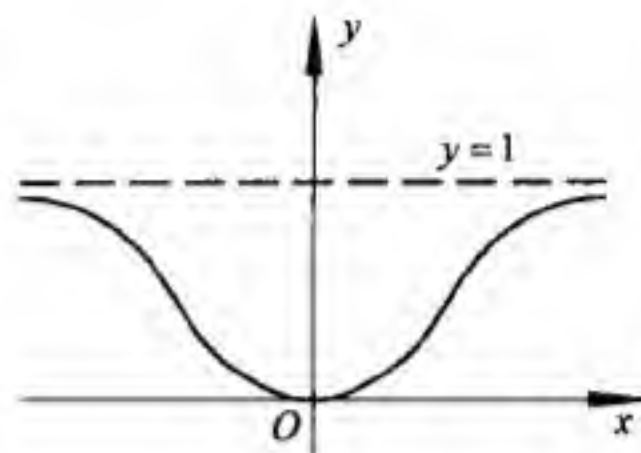


图 2.37

【1226】 证明: 切比雪夫多项式 $T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(\arccos x)$ ($m=0, 1, 2, \dots$) 满足方程

$$(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

证 $T_m'(x) = \frac{m}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\arccos x)$ ($|x| < 1$),

$$T_m''(x) = -\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)} \cos(\arccos x) + \frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\arccos x).$$

于是,

$$(1-x^2)T_m''(x) = -\frac{m^2}{2^{m-1}} \cos(\arccos x) + \frac{mx}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\arccos x) = -m^2 T_m(x) + xT_m'(x),$$

即 $(1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0$.

【1227】 证明: 勒让德多项式 $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2-1)^m]^{(m)}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) 满足方程

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

提示 令 $y = (x^2-1)^m$, 可得 $(x^2-1)y' = 2mxy$, 并利用莱布尼茨公式.

证 设 $y = (x^2-1)^m$, 就有

$$y' = 2mx(x^2-1)^{m-1} \quad \text{或} \quad (x^2-1)y' = 2mxy.$$

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导数, 按莱布尼茨公式, 即得

$$(x^2-1)y^{(m+2)} + 2(m+1)xy^{(m+1)} + m(m+1)y^{(m)} = 2mxy^{(m+1)} + 2m(m+1)y^{(m)}.$$

于是, $(x^2-1)y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} - m(m+1)y^{(m)} = 0$.

两端再以 $\frac{1}{2^m m!}$ 乘之, 并以 $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} y^{(m)}$ 代入, 即得所要证明的等式

$$(1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0.$$

【1228】 切比雪夫—拉盖尔多项式定义如下:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $L_m(x)$ 的显式表达式.

证明: $L_m(x)$ 满足方程 $xL_m''(x) + (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0$.

提示 令 $y = x^m e^{-x}$, 可得 $xy' + (x-m)y = 0$. 并利用莱布尼茨公式.

解 按莱布尼茨公式, 有

$$L_m(x) = e^x \{ (-1)^m x^m e^{-x} + (-1)^{m-1} C_m^1 m x^{m-1} e^{-x} + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} m! x e^{-x} + m! e^{-x} \}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^m x^m + (-1)^{m-1} C_m^1 m x^{m-1} + \cdots + (-1) C_m^{m-1} m! x + m! \\
&= (-1)^m [x^m - m^2 x^{m-1} + \cdots + (-1)^{m-1} m^2 (m-1)! x + (-1)^m m!]
\end{aligned}$$

其次, 设 $y = x^m e^{-x}$, 就有

$$y' = m x^{m-1} e^{-x} - x^m e^{-x},$$

于是,

$$x y' + (x - m) y = 0.$$

在上述等式两端各取 $(m+1)$ 阶导数, 按莱布尼茨公式, 即得

$$x y^{(m+2)} + (m+1) y^{(m+1)} + (x-m) y^{(m+1)} + (m+1) y^{(m)} = 0$$

或

$$x y^{(m+2)} + (1+x) y^{(m+1)} + (m+1) y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 则由上式可得

$$x z'' + (1+x) z' + (m+1) z = 0. \quad (1)$$

由于 $L_m(x) = e^x z$, 故

$$L'_m(x) = e^x (z + z'), \quad L''_m(x) = e^x (z + 2z' + z''),$$

于是,

$$\begin{aligned}
x L''_m(x) + (1-x) L'_m(x) + m L_m(x) &= e^x \{ x(z + 2z' + z'') + (1-x)(z + z') + m z \} \\
&= e^x \{ x z'' + (x+1) z' + (m+1) z \}.
\end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 即证得

$$x L''_m(x) + (1-x) L'_m(x) + m L_m(x) = 0.$$

【1229】 设 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$, 其中 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 为 n 阶可微函数. 证明:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 与函数 $f(u)$ 无关.

证 由于 $\frac{dy}{dx} = f'(u) \varphi'(x)$, 故命题当 $n=1$ 时成立.

设当 $n=m$ 时命题成立, 即有 $\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u)$, 要证命题对于 $n=m+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u) = \sum_{k=1}^m \{ A'_k(x) f^{(k)}(u) + A_k(x) f^{(k+1)}(u) \varphi'(x) \} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} B_k(x) f^{(k)}(u),
\end{aligned}$$

其中, $B_1(x) = A'_1(x)$, $B_k(x) = \varphi'(x) A_{k-1}(x) + A'_k(x)$ ($k=2, 3, \dots, m$), $B_{m+1}(x) = A_m(x) \varphi'(x)$, 它们均与 $f(u)$ 无关.

于是, 由数学归纳法得知, $\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u)$ 对于一切正整数 n 均成立.

【1230】 证明: 对于复合函数 $y = f(x^2)$ 的 n 阶导数, 成立公式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) + \cdots.$$

提示 利用数学归纳法.

证 当 $n=1$ 时公式成立, 事实上, $\frac{dy}{dx} = 2x f'(x^2)$.

设当 $n=m$ 时公式成立, 要证公式对 $n=m+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right) \\
&= 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) + \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} 2(m-4) (2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2) \\
& + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\
& = (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) + \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!} \right] (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
& + \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right] (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\
& = (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) + \frac{(m+1)m}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!} (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots
\end{aligned}$$

这正是公式对于 $n=m+1$ 时的情形. 于是, 由数学归纳法得知, 公式对于一切正整数 n 均成立.

【1231】 切比雪夫—埃尔米特多项式定义如下:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m=0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的显式表达式.

证明: $H_m(x)$ 满足方程 $H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0$.

解 设 $y = e^{-x^2}$, 则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1 (2x)^1 e^{-x^2},$$

$$y'' = e^{-x^2} [(-2x)^2 - 2] = [(-1)^2 (2x)^2 - 2] e^{-x^2}.$$

一般地, 可用数学归纳法证明

$$\begin{aligned}
y^{(m)} = & \left[(-1)^m (2x)^m + (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} \right. \\
& \left. + (-1)^{m-2} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} + \dots \right] e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

于是, 得

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} y^{(m)} = (2x)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \dots.$$

又 $y' + 2xy = 0$.

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导数, 按莱布尼茨公式, 即得

$$y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} + 2(m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 上式就是

$$z'' + 2xz' + 2(m+1)z = 0. \quad (1)$$

由 $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} z$, 得

$$H_m'(x) = (-1)^m e^{x^2} (2xz + z'),$$

$$H_m''(x) = (-1)^m e^{x^2} [(4x^2 + 2)z + 4xz' + z''].$$

从而有

$$\begin{aligned}
H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) &= (-1)^m e^{x^2} \{ (4x^2 + 2)z + 4xz' + z'' - 4x^2z - 2xz' + 2mz \} \\
&= (-1)^m e^{x^2} \{ z'' + 2xz' + 2(m+1)z \}.
\end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 即证得 $H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0$.

【1232】 证明等式: $(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$.

证 当 $n=1$ 时, 由于 $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, 故等式成立.

设当 $n=k$ 时等式成立, 即有 $(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}$, 要证等式对 $n=k+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned}
(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} &= [(x \cdot x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]' = [x(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]' \\
&= x(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} + (x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&= x \left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \right]' + (k+1) \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}} = \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}} e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

于是,由数学归纳法得知, $(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}$ 对于一切正整数 n 均成立.

【1233】 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子, $f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k$ 为微分符号的多项式, 其中 $p_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n$) 为 x 的某连续函数. 证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼茨公式, 有

$$D^k\{e^{\lambda x} u(x)\} = [e^{\lambda x} u(x)]^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k(e^{\lambda x})^{(i)} u^{(k-i)}(x) = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^k C_k \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

另一方面, 有

$$(D+\lambda)^k u(x) = \sum_{i=0}^k C_k \lambda^i D^{(k-i)} u(x) = \sum_{i=0}^k C_k \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

因而, 得

$$D^k\{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} (D+\lambda)^k u(x).$$

于是,

$$f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k\{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n p_k(x) (D+\lambda)^k u(x) = e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x),$$

即 $f(D)\{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D+\lambda)u(x)$.

【1234】 证明: 若在方程 $\sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$ 中令 $x=e^t$, 其中 t 为自变量, 此方程化为

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y=0,$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$.

证明思路 记 $\delta = \frac{d}{dx}$, 则有

$$Dy = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \quad \text{或} \quad \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而, 对于符号 D 及 δ 有关系: $\delta = e^{-t} D$. 继续求得

$$\delta^2 y = \delta(\delta y) = e^{-t} D(\delta y) = e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t} [-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] = e^{-2t} D(D-1)y,$$

利用数学归纳法可证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y, \quad (k \in \mathbb{N})$$

从而, 命题易获证.

证 记 $\delta = \frac{d}{dx}$, 则有

$$Dy = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \quad \text{或} \quad \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而, 对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\delta^2 y = e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t} [-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] = e^{-2t} D(D-1)y,$$

一般地,可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \quad (1)$$

事实上,设公式(1)对 $k=m$ 时成立,则有

$$\begin{aligned} \delta^{(m+1)} y &= \delta(\delta^{(m)} y) = e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-t} [-me^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y + e^{-mt} D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)t} D(D-1)\cdots[D-(m+1)+1]y, \end{aligned}$$

即公式(1)对于 $k=m+1$ 时也成立. 于是,公式(1)对于一切正整数均成立.

于是,

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \sum_{k=0}^n a_k x^k \delta^{(k)} y = \sum_{k=0}^n a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

$$\text{即 } \sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0.$$

§ 6. 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

1° 罗尔定理 若函数 $f(x)$: (1)在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2)在此区间内有有限的导数 $f'(x)$; (3) $f(a) = f(b)$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一个数 c , 使

$$f'(c) = 0.$$

2° 拉格朗日定理 若函数 $f(x)$: (1)在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2)在区间 (a, b) 内有有限的导数 $f'(x)$, 则

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \quad \text{其中 } a < c < b$$

(有限增量公式).

3° 柯西定理 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$: (1)在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2)在 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$; (3)当 $a < x < b$, $f'(x) + g'(x) \neq 0$; (4) $g(a) \neq g(b)$, 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a < c < b$.

【1235】 检验罗尔定理对于函数

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

的正确性.

提示 除了检验 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件外,还必须检验使 $f'(c) = 0$ 中的 c 的存在性,这样,才算完成了检验的目的.

解 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续;

(2) $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 上处处存在;

(3) $f(1) = f(2) = 0$ 及 $f(2) = f(3) = 0$.

由罗尔定理,应该有 $1 < c_1 < 2$, $2 < c_2 < 3$ 存在,使 $f'(c_1) = 0$, $f'(c_2) = 0$. 下面,我们验证确有这种 c_1, c_2 存在. 易知

$$f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = 3x^2 - 12x + 11.$$

令 $f'(x) = 0$ 解之,得 $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故可取

$$c_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad c_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{3};$$

显然 $1 < c_1 < 2$, $2 < c_2 < 3$, 且 $f'(c_1) = 0$, $f'(c_2) = 0$.

【1236】 函数

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

当 $x_1 = -1$ 及 $x_2 = 1$ 时为零, 但是当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f'(x) \neq 0$. 说明与罗尔定理表面上的矛盾.

提示 原因是 $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 在 $x=0$ 处不存在, 不满足罗尔定理的第二个条件. 因此, 当 $-1 \leq x \leq 1$

时, 可以有 $f'(x) \neq 0$.

解 $f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, 它在 $[-1, 1]$ 上恒不为零, 表面上看是与罗尔定理矛盾的. 实际上不然, 原因是

$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在, 不满足罗尔定理的第二个条件, 故当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 可以有 $f'(x) \neq 0$.

【1237】 设函数 $f(x)$ 在有限的或无穷的区间 (a, b) 中的任意一点有有限的导数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

证明: $f'(c) = 0$, 其中 c 为区间 (a, b) 中的某点.

证明思路 当 (a, b) 为有限区间时, 可令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ A, & x = a \text{ 与 } b. \end{cases}$$

其中 $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

然后对 $F(x)$ 使用罗尔定理. 当 (a, b) 为无穷区间时,

(1) 若 $a = -\infty, b = +\infty$, 可令 $x = \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$), 对复合函数 $g(t) = f(\tan t)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内仿前讨论.

(2) 若 a 为有限数, $b = +\infty$, 则可取 $b_0 > \max(a, 0)$, 令 $x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}$, 对 $g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right)$ 在 (a, b_0) 内仿前讨论.

(3) 当 $a = -\infty, b$ 为有限数, 类似地讨论.

证 当 (a, b) 为有限区间时, 设

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ A, & x = a \text{ 与 } b \end{cases}$$

其中 $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

显然 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且有 $F(a) = F(b)$. 故由罗尔定理可知, 在 (a, b) 内至少存在一点 c , 使 $F'(c) = 0$. 而在 (a, b) 内, $F'(x) = f'(x)$, 所以, $f'(c) = 0$.

下设 (a, b) 为无穷区间. 若 $a = -\infty, b = +\infty$, 可设

$$x = \tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right),$$

则对由函数 $f(x)$ 与 $x = \tan t$ 组成的复合函数 $g(t) = f(\tan t)$ 在有限区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内仿前讨论可知: 至少

存在一点 $t_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中 $c = \tan t_0$. 由于 $\sec^2 t_0 \neq 0$, 故 $f'(c) = 0$.

若 a 为有限数, $b = +\infty$ 则可取 $b_0 > \max\{a, 0\}$, 而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是, 对复合函数 $g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right)$ 在有限区间 (a, b_0) 上仿前讨论, 可知: 存在 $t_0 \in (a, b_0)$ 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t_0}{b_0 - t_0}$. 显然 $a < c < +\infty$. 由于 $\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} > 0$, 故 $f'(c) = 0$.

对于 $a = -\infty, b$ 为有限数的情形, 可类似地进行讨论. 证毕.

【1238】 设函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[x_0, x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 在区间 (x_0, x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$; (3) 下面的等式成立:

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明: 在区间 (x_0, x_n) 内至少存在一点 ξ , 使 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

提示 累次应用罗尔定理.

证 在每一个闭区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{k-1}, x_k], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

上, 函数 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件. 因此, 存在 n 个点

$$x'_1, x'_2, \cdots, x'_k, \cdots, x'_n,$$

其中 $x'_k \in (x_{k-1}, x_k) (k=1, 2, \cdots, n)$, 使

$$f'(x'_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n).$$

于是, 在每个区间 $[x'_k, x'_{k+1}] (k=1, 2, \cdots, n-1)$ 上, 函数 $f'(x)$ 满足罗尔定理的条件. 因此存在点 x''_k 属于 $(x'_k, x'_{k+1}) (k=1, 2, \cdots, n-1)$, 使

$$f''(x''_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n-1).$$

继续上述步骤, 经 $(n-1)$ 次后, 得出一个区间 $[x^{(n-1)}_1, x^{(n-1)}_2] \subset (x_0, x_n)$, 满足 $f^{(n-1)}(x^{(n-1)}_k) = 0 (k=1, 2)$. 于是在此区间上, 函数 $f^{(n-1)}(x)$ 满足罗尔定理的条件. 所以, 至少存在一点 $\xi \in (x^{(n-1)}_1, x^{(n-1)}_2)$, 使 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

【1239】 设函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有 $(p+q)$ 阶的连续导数 $f^{(p+q)}(x)$; (2) 在区间 (a, b) 内有 $(p+q+1)$ 阶的导数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3) 下面的等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0, \quad f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0.$$

证明: 在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 内的某点.

证 若 $p=q$.

在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 满足罗尔定理的条件, 因此, 至少存在一点 $x^{(1)}_1 \in (a, b)$, 使 $f'(x^{(1)}_1) = 0$;

对于区间 $[a, x^{(1)}_1]$ 及 $[x^{(1)}_1, b]$, 函数 $f'(x)$ 在其上满足罗尔定理的条件, 因此, 至少分别存在 $x^{(1)}_2, x^{(2)}_2$, 使

$$f''(x^{(1)}_2) = 0, \quad f''(x^{(2)}_2) = 0; \quad \cdots$$

继续上述步骤, 经过 p 次后, 得出 $(p+2)$ 个点: $a, x^{(1)}_p, x^{(2)}_p, x^{(3)}_p, \cdots, x^{(p)}_p, b$ 使

$$f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x^{(k)}_p) = f^{(p)}(b) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, p);$$

由此 $(p+2)$ 个点组成 $(p+1)$ 个区间, 仿 1238 题对于它们重复使用罗尔定理 p 次, 即可得出点 c 属于 (a, b) , 使

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

若 $p \neq q$, 不失一般性, 设 $q = p+k$ (k 为某正整数).

当进行 $(p+1)$ 次后, 对于函数 $f^{(p)}(x) = 0$ 而言, 在 (a, b) 内有 $(p+1)$ 个点: $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p+1}$, 满足

$$f^{(p+1)}(\xi_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots, p+1);$$

再加上条件 $f^{(p+1)}(b) = f^{(p+2)}(b) = \cdots = f^{(p+k)}(b) = 0$, 重复对此再应用罗尔定理 k 次, 则在 (a, b) 内仍然存在 $(p+1)$ 个点: $\xi^{(k)}_1, \xi^{(k)}_2, \cdots, \xi^{(k)}_{p+1}$, 使

$$f^{(p+k+1)}(\xi^{(k)}_j) = 0 \quad (j=1, 2, \cdots, p+1).$$

以后, 每进行一次, 减少一个点, 进行 p 次后, 即可得出 $c \in (a, b)$, 使

$$f^{(p+k+p+1)}(c)=0, \quad \text{即} \quad f^{(p+q+1)}(c)=0.$$

证毕.

【1240】 证明:若具实系数 $a_k (k=0, 1, \dots, n)$ 的多项式

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数,则其逐次的导数 $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P^{(n-1)}_n(x)$ 也仅有实根.

证 根据假设,此处 n 次多项式 $P_n(x)$ 有 n 个实根. 记其诸实根为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$, 并且 α_i 是 k_i 重根, $k_i \geq 1 (i=1, 2, \dots, l)$, 有 $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$. 于是,可改写 $P_n(x)$ 为

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l}$$

显见 α_i 为 $P'_n(x)$ 的 $k_i - 1$ 重根 ($i=1, 2, \dots, l$). 由 $P_n(\alpha_1) = P_n(\alpha_2) = \dots = P_n(\alpha_l) = 0$, $P_n(x)$ 可微,据罗尔定理,存在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$, 而 $\xi_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, 使 $P'_n(\xi_i) = 0 (i=1, 2, \dots, l-1)$. 于是,有

$P'_n(x)$ 的根	$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$	α_1	α_2	\dots	α_l
重数	$\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{单根}}$	$k_1 - 1$	$k_2 - 1$	\dots	$k_l - 1$

即 $n-1$ 次多项式 $P'_n(x)$ 的根恰有 $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_l - 1) + (l - 1) = k_1 + k_2 + \dots + k_l - 1 = n - 1$ 个,这就是说,一个 n 次多项式,若 n 个根均为实根的话,则其导数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根. 反复运用这一结果,由 $P'_n(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根,便可推知 $P''_n(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根. 如此下去,即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导数——直至 $P^{(n-1)}_n(x)$ 也仅有实根.

【1241】 证明:勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{ (x^2 - 1)^n \}$$

的一切根都是实数且包含于区间 $(-1, 1)$ 中.

证 显然, $2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n = (x+1)^n (x-1)^n$ 仅有实根 $(-1$ 是 n 重根, 1 也是 n 重根). 因此,根据 1240 题的结果知 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$ 仅有实根,且都含于 $[-1, 1]$ 中. 但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根 (因为,例如, -1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根,故 -1 是 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} Q_{2n}(x)$ 的单根,因而 -1 不是 $\frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$ 的根). 因此, $P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1, 1)$ 中. 证毕.

【1242】 证明:切比雪夫—拉盖尔多项式 $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$ 所有的根都是正数.

证 令 $Q(x) = x^n e^{-x}$, 易知

$$Q^{(m)}(x) = e^{-x} [(-1)^m x^n + (-1)^{m-1} C_m^1 n x^{n-1} + \dots + (-1) C_m^{m-1} n(n-1) \dots (n-m+2) x^{n-m+1} + n(n-1) \dots (n-m+1) x^{n-m}] \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

显然 $Q^{(m)}(0) = 0 (m=0, 1, \dots, n-1)$, 为方便计,以下记 $Q^{(0)}(x) = Q(x)$, 但 $Q^{(n)}(0) = n! \neq 0$. 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^{(m)}(x) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0, +\infty)$ 应用 1237 题,知存在 $\xi^{(1)} \in (0, +\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)}) = 0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0, \xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)}, +\infty)$ 应用 1237 题,知存在 $\xi^{(2)} \in (0, \xi^{(1)})$, $\xi^{(2)} \in (\xi^{(1)}, +\infty)$ 使

$$Q''(\xi^{(2)}) = 0 \quad (i=1, 2).$$

这样继续下去,反复应用 1237 题 n 次,知存在 $0 < \xi^{(n)} < \xi^{(n-1)} < \dots < \xi^{(1)} < +\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi^{(n)}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

显然 $L_n(\xi^{(n)}) = 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 故 $\xi^{(n)} (i=1, 2, \dots, n)$ 都是 $L_n(x)$ 的根. 但由于

$$L_n(x) = e^x Q^{(n)}(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \dots + (-1) C_n^{n-1} n! x + n!$$

是 x 的 n 次多项式,故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根(实的或复的),因此 $\xi^{(n)} (i=1, 2, \dots, n)$ 是 $L_n(x)$ 的全部根. 证毕.

【1243】 证明:切比雪夫—埃尔米特多项式 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$ 所有的根都是实数.

证 设 $Q(x) = e^{-x^2}$, 显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad Q''(x) = 2e^{-x^2}(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1),$$

从而得知 $Q'(x) = 0$ 有一个实根, $Q''(x) = 0$ 有两个相异的实根.

设 $Q^{(k)}(x) = 0$ 有 k 个相异实根, 并记成 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, 注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积, 从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k),$$

其中 $A \neq 0$ 为某个常数. 下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个相异实根. 事实上, 由

$$Q^{(k)}(a_i) = Q^{(k)}(a_{i+1}) \quad (i=1, 2, \cdots, k-1)$$

应用罗尔定理得知, 存在 $\beta_i \in (a_i, a_{i+1})$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, k-1).$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^{(k)}(x) = 0$ 及 $Q^{(k)}(a_1) = 0$, 利用 1237 题的结果, 故知存在 $\beta_0 \in (-\infty, a_1)$, 使 $Q^{(k+1)}(\beta_0) = 0$.

同法可知, 存在 $\beta_k \in (a_k, +\infty)$, 使 $Q^{(k+1)}(\beta_k) = 0$.

于是, $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个实根. 故由数学归纳法知, $Q^{(n)}(x) = 0$ 有 n 个相异实根 ($n=1, 2, \cdots$), 从而, $H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式, 故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根 (实的或复的). 因此, $H_n(x)$ 所有的根都是实数. 证毕.

【1244】 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线, 平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦, 求出此点.

提示 设所求的点为 (x_0, y_0) , 由题设可得 $3x_0^2 = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3$.

解 由题设知 $y = x^3$ 在所求点 (x_0, y_0) 的切线斜率应为 $y'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3$. 于是,

$$x_0 = -1, \quad \text{或} \quad x_0 = 1,$$

故所求的点为 $A(-1, -1)$ 及 $C(1, 1)$.

【1245】 若 $ab < 0$, 有限增量公式对于函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是否正确?

提示 不正确. 否则会产生矛盾.

解 不正确. 事实上, 如果有限增量公式在此成立, 则有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b),$$

即

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{\xi^2}(b-a) = \frac{a-b}{\xi^2}.$$

但是 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$. 所以 $\frac{a-b}{\xi^2} = \frac{a-b}{ab}$, 即有 $\xi^2 = ab < 0$, 这样产生矛盾. 因此, 有限增量公式对于函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, b]$ ($ab < 0$) 上不正确. 原因是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不存在, 故有限增量公式的条件不满足.

【1246】 设:

$$(1) f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0); \quad (2) f(x) = x^3; \quad (3) f(x) = \frac{1}{x}; \quad (4) f(x) = e^x.$$

求满足 $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x+\theta\Delta x)$ ($0 < \theta < 1$) 的函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$.

解 (1) $f'(x) = 2ax + b$. 于是, 有

$$a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - ax^2 - bx - c = \Delta x[2a(x+\theta\Delta x) + b].$$

化简之, 得 $\theta = \frac{1}{2}$.

(2) $f'(x) = 3x^2$. 于是, 有

$$(x+\Delta x)^3 - x^3 = 3\Delta x(x+\theta\Delta x)^2.$$

如果 $x=0$, 则 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 如果 $x \neq 0$, 化简整理得

$$3\theta^2\Delta x + 6\theta x - (3x + \Delta x) = 0,$$

从而有

$$\theta = \frac{\pm \sqrt{x^2 + x\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2} - x}{\Delta x}.$$

其中正负号的取法由 x 及 Δx 的符号及条件 $0 < \theta < 1$ 决定. 例如, 当 $x \geq 0, \Delta x > 0$ 时, 根式前应取正号.

(3) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. 于是, 有

$$\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{(x+\theta\Delta x)^2}.$$

化简之, 得

$$\theta^2(\Delta x)^2 + 2x\theta\Delta x - x\Delta x = 0, \quad \text{或} \quad \theta^2 + 2\frac{x}{\Delta x}\theta - \frac{x}{\Delta x} = 0,$$

故 $\theta = \frac{x}{\Delta x} \left(\pm \sqrt{1 + \frac{\Delta x}{x}} - 1 \right)$. 此处取正负号要视确保 $\theta \in (0, 1)$ 而定, 且应有 $\frac{\Delta x}{x} > -1$ ($x \neq 0$).

(4) $f'(x) = e^x$. 于是, 有

$$e^{x+\Delta x} - e^x = \Delta x e^{x+\theta\Delta x}, \quad \theta = \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

可以验证 $\theta \in (0, 1)$.

【1247】 证明: 若 $x \geq 0$, 则

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2}$, 并且 $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}$.

证 当 $x \geq 0$ 时, 对函数 \sqrt{x} 施用有限增量公式, 即得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之, 得

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} [\sqrt{x(x+1)} - x].$$

当 $x=0$ 时, $\theta = \frac{1}{4}$. 当 $x > 0$ 时, 有

$$0 \leq \sqrt{x(x+1)} - x = \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} < \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

于是,

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)} + x]} \right\} = \frac{1}{2}.$$

【1248】 设
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c .

解
$$f(0) = \frac{3}{2}, \quad f(2) = \frac{1}{2}, \quad f'(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -c(2-0) \quad \text{或} \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以, $c = \frac{1}{2}$ 或 $c = \sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ 不适合), 此即所求的中间值 c .

【1249】 设 $f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)]$, 其中 $0 < \xi(x) < x$.

证明: 若

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\ln x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则函数 $\xi = \xi(x)$ 在任意小的区间 $(0, \epsilon)$ 内 ($\epsilon > 0$) 是不连续的.

提示 用反证法即可获证.

证 用反证法. 假定 $\xi(x)$ 在某区间 $(0, \epsilon)$ 内连续 ($\epsilon > 0$). 由于当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right),$$

故由 $f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)]$ 得

$$x \sin(\ln x) = x \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right),$$

从而,

$$\sin(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right), \quad 0 < x < +\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N , 使

$$-2N\pi + \frac{\pi}{4} < \ln \xi\left(\frac{\epsilon}{2}\right).$$

由 $0 < \xi(x) < x$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \xi(x) = 0$, 从而,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \xi(x) = -\infty.$$

因此, 可取 $0 < \delta < \frac{\epsilon}{2}$, 使

$$\ln \xi(\delta) < -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln \xi(x)$ 在 $\left[\delta, \frac{\epsilon}{2}\right]$ 上连续, 根据中间值定理, 必有 $x_0 \in \left(\delta, \frac{\epsilon}{2}\right)$ 存在, 使

$$\ln \xi(x_0) = -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

于是, $1 \geq \sin(\ln x_0) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x_0)\right) = \sqrt{2}$, 这是不可能的. 证毕.

【1250】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导数 $f'(x)$. 对于区间 (a, b) 内任何一点 ξ , 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

提示 研究函数 $f(x) = x^3$ ($-1 < x < 1$), 它对于 $\xi = 0$ 就找不到所需的 x_1 及 x_2 .

解 一般地说, 不可以. 例如, 研究函数

$$f(x) = x^3 \quad (-1 < x < 1),$$

它对于 $\xi = 0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2 , 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

事实上, $f'(\xi) = 3\xi^2 = 0$, 而当 $x_1 < 0 < x_2$ 时,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 = x_2^2 + x_1^2 - |x_1| |x_2| > x_2^2 + x_1^2 - 2|x_1| |x_2|$$

$$=(|x_1|-|x_2|)^2>0.$$

【1251】 证明下列不等式:

$$(1) |\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$$

$$(2) py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)^{p-1} \quad (0 < y < x, p > 1);$$

$$(3) |\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|;$$

$$(4) \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}, \text{ 设 } 0 < b < a.$$

证 (1) $|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos \xi| \leq |x-y|$ (ξ 在 x, y 之间).

(2) $x^p - y^p = p(x-y)\xi^{p-1}$, 其中 $0 < y < \xi < x$. 由于 $p > 1$, 所以, $y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1}$.

于是, $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y)$.

*) 原题的不等式中的等号可以去掉.

$$(3) |\arctan a - \arctan b| = \left| \frac{a-b}{1+\xi^2} \right| \leq |a-b|.$$

$$(4) \ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}, \text{ 其中 } 0 < b < \xi < a. \text{ 于是, } \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

【1252】 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上柯西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

提示 注意当 $x=0$ 时, $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 0$.

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上虽有连续的导数, 且 $g(-1) \neq g(1)$, 但是, 当 $x=0$ 时,

$$[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 4x^2 + 9x^4 = 0,$$

因此, 对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足柯西定理的条件, 所以结论可以不真. 事实上,

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} = 0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \neq 0, \quad \xi \in (-1, 1), \quad \xi \neq 0,$$

它们是不相等的.

【1253】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微, 并且 $x_1 x_2 > 0$, 证明:

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

证明思路 令 $g(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 注意由于 $x_1 x_2 > 0$, 故 $x=0$ 在 $[x_1, x_2]$ 之外. 对于 $F(x)$ 和 $g(x)$

应用柯西定理.

证 设 $g(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 由于 $x_1 x_2 > 0$, 故 $x=0$ 在 $[x_1, x_2]$ 之外. 从而, $g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1, x_2]$ 上可微, 且有

$$[g'(x)]^2 + [F'(x)]^2 = \frac{1}{x^4} \{1 + [xf'(x) - f(x)]^2\} \neq 0 \quad \text{及} \quad g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此, 对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足柯西定理的条件, 故在 (x_1, x_2) 内至少存在一点 ξ , 使有

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{即} \quad \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理, 即得

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

【1254】 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a, b) 内可微, 但无界, 则其导数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内也无

界. 逆定理不真(举出例子).

提示 用反证法及拉格朗日定理. 其逆不真, 例如, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ($0 < x < \frac{1}{2}$).

证 在开区间 (a, b) 内, 由于导数存在, 因此, $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

现在假定 $|f'(x)| < N$ ($a < x < b$), 即 $f'(x)$ 是有界的. 取定 $c \in (a, b)$, 则按有限增量公式可知, 对任何 $a < x < b$, 均有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| |f'(\xi)| < N(b - a).$$

其中 ξ 在 c 与 x 之间, 从而属于 (a, b) .

因为 $|f(x) - f(c)| \geq |f(x)| - |f(c)|$, 所以, $|f(x)| < |f(c)| + N(b - a)$. 此与 $f(x)$ 是无界的条件相矛盾, 所以 $f'(x)$ 是无界的.

反之不一定正确. 例如, 函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 内有界, 但其导数却是无界的.

注意 在无限区间内无界的函数的导数可能有界. 例如, 函数 $f(x) = \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 内无界, 但其导数 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内却是有界的.

【1255】 证明: 若函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a, b) 内有有界的导数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 中一致连续.

提示 利用拉格朗日定理.

证 设当 $x \in (a, b)$ 时, $|f'(x)| \leq M$. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, 则当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| |f'(\xi)| \leq M |x_1 - x_2| < \epsilon, \quad (\xi \text{ 在 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 之间}),$$

于是, $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

【1256】 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \quad \text{则} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $X_1 > 0$, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$|f'(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

今在 $(X_1, +\infty)$ 内任取一点 a , 则当 $x > a$ 时, 由有限增量公式可得

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| |f'(\xi)| < \frac{\epsilon}{2} |x - a|.$$

由于

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)|,$$

所以,

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \frac{\epsilon}{2} |x - a|.$$

再取 $X_2 > a$, 使 $\frac{|f(a)|}{X_2} < \frac{\epsilon}{2}$, 则当 $x > X_2$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{|f(a)|}{x} + \frac{\epsilon}{2} \frac{|x - a|}{x} < \frac{|f(a)|}{X_2} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, 即: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

【1257】 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

证 由条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 易得对于任意常数 $a > x_0$, 均有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \left(1 + \frac{a}{x-a} \right) - \frac{f(a)}{x-a} \right] = 0.$$

于是, 对于 $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \max\{n, x_0 + 1\}$ ($n = 1, 2, \dots$), 总存在 $b_n > a_n$, 使

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right| < \epsilon_n.$$

由拉格朗日定理知, 存在 $x_n: a_n < x_n < b_n$, 使得

$$f'(x_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}, \quad \text{即} \quad |f'(x_n)| < \epsilon_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

从而, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f'(x_n)| = 0$. 由于 $x_n > a_n \geq n$, 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. 由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$.

【1258】 (1) 证明: 若函数 $f(x)$: (I) 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义并且是连续的; (II) 在区间 (x_0, X) 内有有限的导数 $f'(x)$; (III) 存在有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0),$$

则相应地存在有限或无穷的单侧导数 $f'_+(x_0)$ 且 $f'_-(x_0) = f'(x_0+0)$.

(2) 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 存在有限的极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$, 但是函数 $f(x)$ 没有单侧的

导数 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$.

给出这个事实的几何解释.

证 (1) 由有限增量公式, 有

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

当 $\Delta x \rightarrow +0$ 时, $x_0 + \theta \Delta x \rightarrow x_0 + 0$.

由假设条件知 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} f'(x_0 + \theta \Delta x) = f'(x_0 + 0)$, 所以有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + 0),$$

即 $f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$.

(2) 当 $x \neq 1$ 时, $f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

于是, $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$.

但是, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1} = -\infty$

及 $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x-1} = -\infty$,

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在.

$y = f(x)$ 的图像如图 2.38 所示.

当 $x \rightarrow 1-0$ 时, $f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow 1+0$ 时, $f(x) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

即 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类不连续点, 即在 $x=1$ 处 $f(x)$ 产生突跃, 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处无导数.

【1259】 证明: 若当 $a < x < b$ 时, $f'(x) = 0$, 则当 $a < x < b$ 时, $f(x) = \text{常数}$.

提示 在 (a, b) 内取一定点 x_0 , 当 $a < x < b$ 时, 利用拉格朗日定理及题设条件, 命题易获证.

证 在 (a, b) 内取一定点 x_0 , 则当 $a < x < b$ 时, 按有限增量公式可得

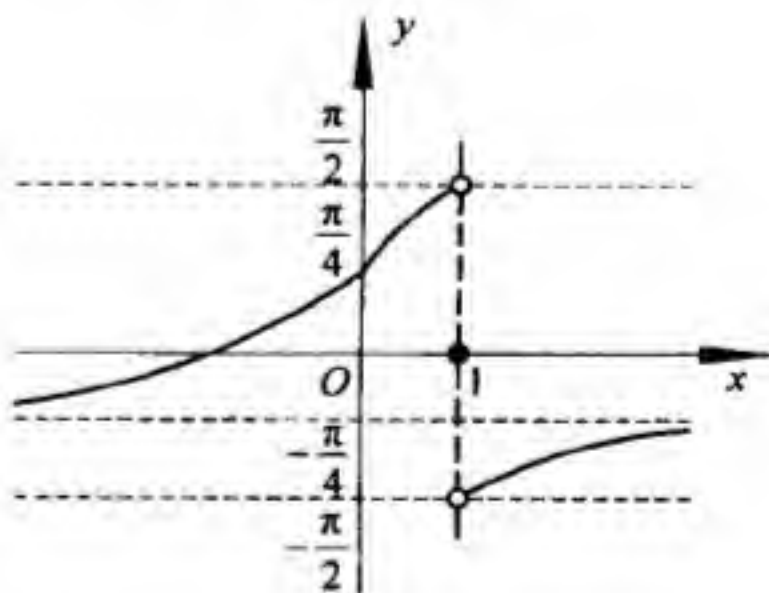


图 2.38

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c) = 0$, 故 $f(x) - f(x_0) = 0$, 即 $f(x) = f(x_0) = \text{常数}$.

【1260】 证明: 导数为常数 $f'(x) = k$ 的唯一函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是线性函数 $f(x) = kx + b$.

证明思路 注意到 $[f(x) - kx]' = f'(x) - k = 0$, 利用 1259 题的结果, 命题易获证.

证 $[f(x) - kx]' = f'(x) - k = k - k = 0$, 于是, 利用 1259 题的结果, 即知

$$f(x) - kx = b \quad (b \text{ 为常数}),$$

故 $f(x)$ 必为线性函数: $f(x) = kx + b$. 证毕.

【1261】 若 $f^{(n)}(x) = 0$, 则函数 $f(x)$ 有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x) = 0$, 于是, $f^{(n-1)}(x) = c$ (c 为常数). 再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x) = cx + b.$$

假设

$$f^{(k)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x) = f^{(k-1)}(x) - \left(a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k} \right),$$

则有 $\Phi'(x) = f^{(k)}(x) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1}) = 0$.

由 1259 题知 $\Phi(x) = b_0$, 并记 $a_0 = b_1, \frac{1}{2}a_1 = b_2, \cdots, \frac{1}{n-k}a_{n-k-1} = b_{n-k}$, 则有

$$f^{(k-1)}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-k}x^{n-k}.$$

依数学归纳法便有

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1},$$

它是 $n-1$ 次多项式, 其中 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 是任意常数.

【1262】 证明: 满足方程 $y' = \lambda y$ ($\lambda = \text{常数}$) 的唯一函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数 $y = Ce^{\lambda x}$, 其中 C 为任意常数.

证明思路 注意到 $(ye^{-\lambda x})' = y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = 0$, 利用 1259 题的结果, 命题易获证.

证 $(ye^{-\lambda x})' = y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} = 0$, 于是, $ye^{-\lambda x} = C$ (C 为常数), 即 $y = Ce^{\lambda x}$.

【1263】 检验函数

$$f(x) = \arctan \frac{x+a}{1-ax}, \quad g(x) = \arctan x$$

在区间: (1) $ax < 1$ 及 (2) $ax > 1$ 内有相同的导数.

推出这些函数间的关系.

解 当 $ax < 1$ 或 $ax > 1$ 时,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+a}{1-ax} \right)^2} \cdot \frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2} = \frac{1}{1+x^2}, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

故有 $f'(x) = g'(x)$ ($ax < 1$ 或 $ax > 1$). 因此,

$$\text{当 } ax < 1 \text{ 时, } f(x) - g(x) = C_1, \quad (1)$$

$$\text{当 } ax > 1 \text{ 时, } f(x) - g(x) = C_2, \quad (2)$$

下面确定常数 C_1 与 C_2 . 设 $a > 0$ ($a < 0$ 情形可类似地讨论).

在(1)中令 $x \rightarrow -\infty$, 得 $-\arctan \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2} = C_1$, 故 $C_1 = \arctan a$. 因此,

$$\arctan \frac{x+a}{1-ax} - \arctan x = \arctan a \quad (ax < 1),$$

在(2)中令 $x \rightarrow +\infty$, 得 $-\arctan \frac{1}{a} - \frac{\pi}{2} = C_2$, 故 $C_2 = \arctan a - \pi$. 因此,

$$\arctan \frac{x+a}{1-ax} - \arctan x = \arctan a - \pi \quad (ax > 1).$$

【1264】 证明下列恒等式:

$$(1) 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \text{ 当 } |x| \geq 1;$$

$$(2) 3\arccos x - \arccos(3x-4x^3) = \pi, \text{ 当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

证 (1) 当 $|x| > 1$ 时, 由于

$$\left(2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

故 $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = C_1$, 当 $x > 1$ 时; $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = C_2$, 当 $x < -1$ 时.

下面确定常数 C_1 与 C_2 . 令 $x = \sqrt{3}$, 代入前一式, 得 $C_1 = \pi$; 令 $x = -\sqrt{3}$, 代入后一式, 得 $C_2 = -\pi$. 从而, 当 $|x| \neq 1$ 时, 有

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi, & x > 1, \\ -\pi, & x < -1. \end{cases}$$

而当 $|x| = 1$ 时, 上式仍然成立. 于是, 当 $|x| \geq 1$ 时, 有

$$2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x.$$

(2) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$[3\arccos x - \arccos(3x-4x^3)]' = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} \cdot (3-12x^2) = 0,$$

故有

$$3\arccos x - \arccos(3x-4x^3) = C \quad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right),$$

其中 C 为常数. 令 $x = 0$, 代入上式, 即可求出 $C = \pi$. 于是,

$$3\arccos x - \arccos(3x-4x^3) = \pi \quad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x = \frac{1}{2}$ 左连续, 在 $x = -\frac{1}{2}$ 右连续, 分别取极限即知上式当 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 时也成立. 于是,

$$3\arccos x - \arccos(3x-4x^3) = \pi \quad \left(|x| \leq \frac{1}{2}\right).$$

【1265】 证明: 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的; (2) 在此区间内有有限的导数 $f'(x)$; (3) 不是线性函数, 则在区间 (a, b) 内至少能找到一点 c , 使得

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right|.$$

给出这个事实的几何解释.

证 当 $a \leq x \leq b$ 时, 设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

易知 $F(a) = F(b) = 0$, 且当 $a < x < b$ 时, $F(x) \neq 0$ (因为 $f(x)$ 为非线性函数). 设在 c_1 ($a < c_1 < b$) 点, $F(c_1) \neq 0$, 不妨设 $F(c_1) > 0$, 在区间 $[a, c_1]$ 与 $[c_1, b]$ 上分别应用拉格朗日定理, 可知存在 $\xi_1 \in (a, c_1)$ 使

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a} = \frac{F(c_1)}{c_1-a} > 0;$$

存在 $\xi_2 \in (c_1, b)$, 使

$$F'(\xi_2) = \frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1} = -\frac{F(c_1)}{b-c_1} < 0.$$

因而,

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad (2)$$

由此可知:

$$\text{当 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0 \text{ 时, 由 (1), } |f'(\xi_1)| > \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right|;$$

$$\text{当 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0 \text{ 时, 由 (2), } |f'(\xi_2)| > \left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right|.$$

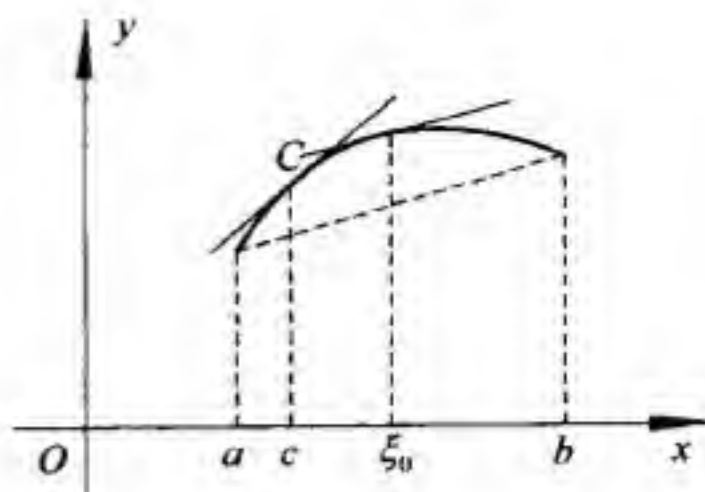


图 2.39

于是, 命题得证.

这个事实的几何意义是: 对于一条非直线的连续曲线段(线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线), 在曲线上至少存在一点 C , 使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的弦的斜率的绝对值, 换句话说, 此切线比此弦“陡”, 如图 2.39 所示.

【1266】 证明: 若函数 $f(x)$: (1) 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导数 $f''(x)$; (2) $f'(a) = f'(b) = 0$,

则在区间 (a, b) 内至少存在一点 c , 使得 $|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

证 设 x_0 是 $[a, b]$ 中任意固定的一点, 两次应用柯西定理*, 即得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi), \quad (1)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间(即 $x_0 \leq \xi \leq x$), x 为 $[a, b]$ 中任意点. 特别, 在(1)式中取 $x_0 = a$, $x = \frac{a+b}{2}$, 并利用已知条件 $f'(a) = 0$, 则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a < c_1 < \frac{a+b}{2}$.

同理, 在(1)式中取 $x_0 = b$, $x = \frac{a+b}{2}$, 并利用已知条件 $f'(b) = 0$, 则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_2),$$

其中 c_2 满足 $\frac{a+b}{2} < c_2 < b$. 于是,

$$|f(b) - f(a)| \leq \left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| = \frac{(b-a)^2}{8} \{ |f''(c_1)| + |f''(c_2)| \}. \quad (2)$$

取 c 如下: 若 $|f''(c_1)| \geq |f''(c_2)|$, 则令 $c = c_1$; 若 $|f''(c_1)| < |f''(c_2)|$, 则令 $c = c_2$. 于是, $a < c < b$ 且

* 仅考虑 $x > x_0$ ($x < x_0$ 时可类似地讨论). 令

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] \quad G(x) = (x - x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0) = G(x_0) = 0$, $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ (记为 $F_1(x)$), $G'(x) = 2(x - x_0)$ (记为 $G_1(x)$),

并且 $F'(x_0) = G'(x_0) = 0$, (即 $F_1(x_0) = G_1(x_0) = 0$), 但当 $x \neq x_0$, $G'(x) \neq 0$, 而

$$F_1'(x) = F''(x) = f''(x), \quad G_1'(x) = G''(x) = 2.$$

应用柯西定理, 得 $\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{F_1(c) - F_1(x_0)}{G_1(c) - G_1(x_0)} = \frac{F_1'(c)}{G_1'(c)} = \frac{f''(c)}{2}$,

此处 $\xi \in (x_0, c)$, 而 $c \in (x_0, x)$, 从而知 $\xi \in (x_0, x)$. 因此, 有 $F(x) = \frac{1}{2}G(x)f''(\xi)$ 也即有公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi).$$

其中 $x_0 < \xi < x$ (以后即将看到, 这就是所谓的泰勒公式, 这里就顺便给出了一个关于二阶的泰勒公式的另一种推论方法).

$|f''(c)| = \max\{|f''(c_1)|, |f''(c_2)|\}$. 由此, 根据(2), 即得

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} |f''(c)|. \quad \text{从而, } |f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

【1267】 汽车从某点开始行驶, 于 t 秒内走完了路程, 所经过的距离为 s . 证明: 汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}$.

提示 利用 1266 题的结果.

解 利用 1266 题的结果即可得证. 此时 $s = f(t)$, $f(t) - f(0) = s$, $t - 0 = t$.

故 $a = \frac{d^2 s}{dt^2} \Big|_{t=t_1}$ 的绝对值 $|a| \geq \frac{4s}{t^2}$.

§ 7. 增函数与减函数. 不等式

1° 增函数与减函数 若

$$\text{当 } a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ 时, } f(x_2) > f(x_1)$$

[或当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$], 则称函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的增函数(或减函数).

若可微函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的增函数(或减函数), 则

$$\text{当 } a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \geq 0$$

[或当 $a \leq x \leq b$ 时, $f'(x) \leq 0$].

2° 函数递增(或递减)的充分条件 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的; 并且在其内有正的(或负的)导数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内递增(或递减).

求下列函数的严格单调(增或减)区间:

【1268】 $y = 2 + x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$. 当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时, $y' > 0$, 函数递增; 当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数递减.

【1269】 $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1-x)(1+x)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数递减; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数递增; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数递减.

【1270】 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数递减; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数递增; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数递减.

【1271】 $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geq 0)$.

解 $y' = \frac{-x+100}{2\sqrt{x}(x+100)^2}$. 当 $0 < x < 100$ 时, $y' > 0$, 函数递增; 当 $100 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数递减.

【1272】 $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x \geq 0$. 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数递增.

【1273】 $y = x + |\sin 2x|$.

解 $y' = 1 + 2 \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} \cos 2x \quad (x \neq \frac{k\pi}{2}; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

当 $x \in (\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$ 时, $y' > 0$, 函数递增;

当 $x \in (\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

【1274】 $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$, 即当 $x \in (\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$ 及 $x \in (-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2})$ 时, $y' > 0$, 函数递增 ($k=1, 2, \dots$);

同理, 当 $x \in (\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1})$ 及 $x \in (-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1})$ 时, $y' < 0$, 函数递减 ($k=1, 2, \dots$).

【1275】 $y = \frac{x^2}{2^x}$.

解 $y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$.

当 $-\infty < x < 0$ 及 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数递减; 当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时, $y' > 0$, 函数递增.

【1276】 $y = x^n e^{-x}$ ($n > 0, x \geq 0$).

解 $y' = x^{n-1} e^{-x} (n-x)$.

当 $x \in (0, n)$ 时, $y' > 0$, 函数递增; 当 $x \in (n, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数递减.

【1277】 $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 函数递减;

当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时, $y' > 0$, 函数递增.

【1278】 $f(x) = \begin{cases} x(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解 $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \ln x)$ ($x > 0$).

令 $f'(x) = 0$, 得 $\sin(\ln x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 解上述方程得 $x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}$, $x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$

或 $x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}$, $x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

当 $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$ 时, $f'(x) > 0$, 函数递增;

当 $x \in (e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数递减.

【1279】 证明: 圆的内接正 n 边形的周长 p_n , 当边的数目 n 增加时增加, 而此圆的外切正 n 边形的周长 P_n 此时则减小. 利用这点来证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, p_n 及 P_n 有相同的极限.

证 如图 2.40 所示, 我们有

$$p_n = 2nx = 2n a \sin \alpha = 2n a \sin \frac{\pi}{n},$$

$$P_n = 2ny = 2n a \tan \alpha = 2n a \tan \frac{\pi}{n}.$$

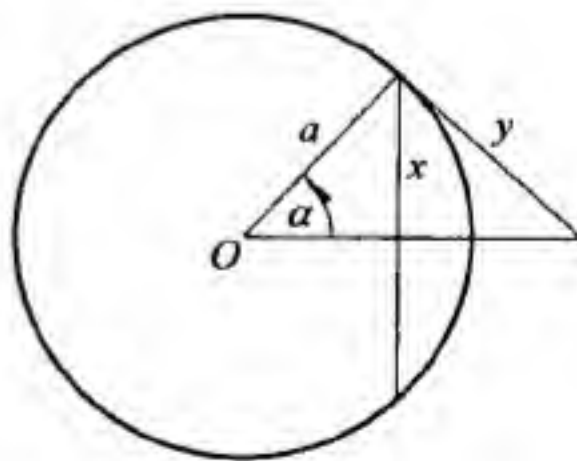


图 2.40

考虑 $f(x) = \frac{2a}{x} \sin \pi x$. 易证当 $x(x>0)$ 很小时有 $f'(x) < 0$, 从而, 当 x 变小时 $f(x)$ 递增. 所以, $p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$

当 n 增加时, p_n 增加. 同样, 令 $g(x) = \frac{2a}{x} \tan \pi x$, 利用 $x < \tan x$ (当 x 很小时, $x > 0$), 可证得 $g'(x) > 0$, 情形相

反, 当 x 变小时, $g(x)$ 递减, 故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增加时减小. 总之, 有 $p_n < p_{n+1}$ 及 $P_{n+1} < P_n$, 并且显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$. 于是,

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n,$$

故 $\{P_n\}$ 是有界减数列, $\{p_n\}$ 是有界增数列, 从而, 它们的极限都存在, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi a \left(\frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right) = 0,$$

故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

【1280】 证明: 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 内递增.

证 设 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}$, 则 $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right]$.

由于当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$, 因此要看 y' 为正或为负, 只需看 $\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ 的正负性.

再设 $z = \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$, 则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0, \quad x \in (-\infty, -1),$$

故当 $-\infty < x < -1$ 时 z 递增, 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} z = 0$, 因而 $z > 0$. 于是, 在 $(-\infty, -1)$ 内 $y' > 0$, 因此, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 内递增.

同理可证, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内递增.

【1281】 证明: 有理整函数 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$) 是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数, 其中 x_0 为充分大的正数.

证 由于

$$P'_n(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1} = x^{n-1} \left(na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right).$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right] = 0,$$

故存在 $x_0 > 0$, 使当 $|x| > x_0$ 时,

$$\left| \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right| < n|a_n|.$$

由此可知, 当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $P'_n(x)$ 均保持定号 (例如, 若 $a_n > 0$, 则当 $x_0 < x < +\infty$ 时, $P'_n(x) > 0$), 故 $P_n(x)$ 是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数. 证毕.

【1282】 证明: 有理函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \quad (m+n \geq 1, m \neq n^*, a_n b_m \neq 0)$$

是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数, 其中 x_0 为充分大的正数.

证 我们有

$$R'(x) = \frac{1}{(b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)^2} \{ [a_1 + 2a_2 x + \cdots + na_n x^{n-1}] [b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m] \}$$

$$\begin{aligned}
& -[b_1 + 2b_2x + \cdots + mb_mx^{m-1}][a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n] \} \\
& = \frac{1}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \{ (a_1b_0 - a_0b_1) + 2(a_2b_0 - a_0b_2)x + \cdots \\
& \quad + [(n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2} + (n-m)a_nb_ma^{m+n-1} \} \\
& = \frac{x^{m+n-1}}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \left[(n-m)a_nb_m + \frac{(n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m}{x} + \cdots \right. \\
& \quad \left. + \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{x^{m+n-1}} \right].
\end{aligned}$$

仿 1281 题的证法, 可知存在 $x_0 > 0$, 使当 $|x| > x_0$ 时上式右端方括弧内的式子与第一项 $(n-m)a_nb_m$ 同符号, 由此可知, 当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时, $R'_n(x)$ 均保持定号, 故 $R(x)$ 是区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 上的严格单调函数.

*) 本题应加上条件 $m \neq n$ (原题上没有). 否则所述结论不成立. 例如, 若 $m = n, a_i = b_i (i = 0, 1, \cdots, n)$, 则 $R(x) \equiv 1$, 它在 $(x_0, +\infty)$ 上显然不是严格单调的.

【1283】 单调函数的导数是否也必为单调的?

提示 不. 例如, 函数 $f(x) = x + \sin x$, 在 $(0, +\infty)$ 上.

解 不. 例如函数

$$f(x) = x + \sin x,$$

在区间 $(0, +\infty)$ 内, 由于 $f'(x) = 1 + \cos x > 0$ (除 $x = (2n+1)\pi, n = 0, 1, \cdots$), 所以它是单调增加的; 然而其导数 $f'(x)$ 却不是单调的. 事实上由于 $f'(\frac{\pi}{2}) = 1, f'(\pi) = 0, f'(\frac{3\pi}{2}) = 1$, 显见并非是单调的.

【1284】 证明: 若 $\varphi(x)$ 为可微的单调增函数, 且当 $x \geq x_0$ 时, $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$, 则当 $x \geq x_0$ 时,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

给出这个事实的几何解释.

证明思路 分别令 $\psi(x) = \varphi(x) - f(x), \psi_1(x) = \varphi(x) + f(x)$. 对 $\psi(x)$ 及 $\psi_1(x)$ 在 $[x_0, x]$ 上应用拉格朗日定理, 或用反证法.

证 证法 1:

作函数 $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$, 由拉格朗日定理知

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(\xi)(x - x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

由 $|f'(x)| \leq \varphi'(x)$ 知 $\psi'(\xi) = \varphi'(\xi) - f'(\xi) \geq 0$. 从而, $\psi(x) - \psi(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x) - f(x_0). \quad (1)$$

再令 $\psi_1(x) = \varphi(x) + f(x)$, 同理有 $\psi_1(x) - \psi_1(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x_0) - f(x). \quad (2)$$

结合 (1) 和 (2) 便得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq |f(x) - f(x_0)|.$$

证法 2:

用反证法. 若有一点 $b > x_0$, 使得

$$|f(b) - f(x_0)| > \varphi(b) - \varphi(x_0).$$

设 $F(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}[\varphi(x) - \varphi(x_0)]$, 由于 $F(b) = F(x_0) = 0$, 所以根据罗尔定理, 得知存在点 $c \in (x_0, b)$ 使 $F'(c) = 0$, 即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(x_0)}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}\varphi'(c) = 0.$$

因而, 有 $|f'(c)| = \frac{|f(b) - f(x_0)|}{\varphi(b) - \varphi(x_0)}\varphi'(c) > \varphi'(c)$. 这与题设条件 $|f'(c)| \leq \varphi'(c)$ (对于一切 $x \geq x_0$ 而言) 相矛盾. 于是, 命题获证.

其几何意义就是:若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应的点的切线“陡”,则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦“陡”.如图 2.41 所示.

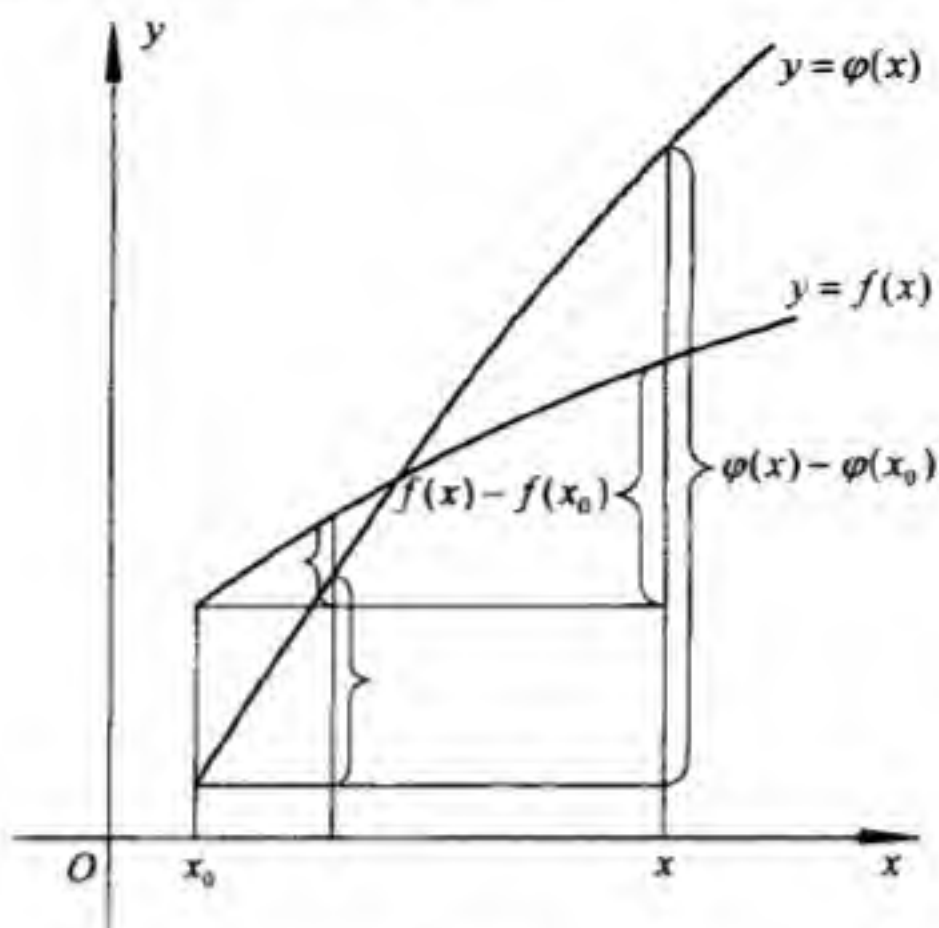


图 2.41

【1285】 设函数 $f(x)$ 在区间 $a \leq x < +\infty$ 内连续, 而且当 $x > a$ 时, $f'(x) > k > 0$, 其中 k 为常数. 证明: 若 $f(a) < 0$, 则在区间 $(a, a - \frac{f(a)}{k})$ 内方程 $f(x) = 0$ 有且仅有一个实根.

证明思路 先利用拉格朗日定理证明 $f(a - \frac{f(a)}{k}) > 0$, 再根据连续函数的介值定理及函数的单调性, 命题易获证.

证 由有限增量公式, 有

$$f(a - \frac{f(a)}{k}) - f(a) = -\frac{f(a)}{k} f'(\xi) > -\frac{f(a)}{k} \cdot k = -f(a).$$

于是, $f(a - \frac{f(a)}{k}) > 0$. 又 $f(a) < 0$, 故根据连续函数的介值定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, a - \frac{f(a)}{k})$ 上至少有一实根. 又因为当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内递增, 由此可知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $(a, a - \frac{f(a)}{k})$ 内有且仅有一个实根.

【1286】 若于某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内, 函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 的符号与自变量增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 称函数 $f(x)$ 为在 x_0 点的增函数.

证明: 若函数 $f(x)$ ($a < x < b$) 在有限或无穷的区间 (a, b) 内的每一点皆为增函数, 则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点 $x_1 < x_2$ ($a < x_1 < x_2 < b$), 都有 $f(x_1) < f(x_2)$. 对 $[x_1, x_2]$ 中每一点 c , 由假定都存在开区间 $\Delta_c = (c - \delta_c, c + \delta_c)$ 使当 $0 < |x - c| < \delta_c$ 时, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. 于是, 诸区间 $\{\Delta_c\}$ (c 取遍 $[x_1, x_2]$) 形成 $[x_1, x_2]$ 的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理, 从 $\{\Delta_c\}$ 中可选出有限个, 设为 $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_2}, \dots, \Delta_{c_m}$, 它们已经复盖了 $[x_1, x_2]$. 不妨设 $x_1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < x_2$, 而且可设诸 Δ_{c_i} 互不包含 (因若 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 则可将 Δ_{c_i} 舍去). 于是, 必有 $x_1 \in \Delta_{c_1}$ (因若 x_1 不属于 Δ_{c_1} , 而属于某 Δ_{c_j} , $j > 1$, 则显然有 $\Delta_{c_1} \subset \Delta_{c_j}$, 此与诸 Δ_{c_i} 互不包含矛盾). 另外, 易知 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) 必有公共点 \bar{x}_i (因若 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点, 则点 $c_i + \delta_{c_i}$ 必属于某 Δ_{c_j} , $j \neq i, j \neq i+1$, 若 $j < i$, 则 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 矛盾; 若 $j > i+1$, 则 $\Delta_{c_{i+1}} \subset \Delta_{c_j}$, 也矛盾). 显然可取公共点 \bar{x}_i 满足 $c_i < \bar{x}_i < c_{i+1}$.

于是,

$$f(c_i) < f(\bar{x}_i) < f(c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

同理,可知 $x_2 \in \Delta_{c_m}$. 于是,我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \cdots < f(c_m) < f(x_2).$$

证毕.

【1287】 证明:函数

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 是增函数,但在包含这点的任何区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中并非增函数,其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数. 作出此函数的略图.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= 1 > 0, \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 在点 $x=0$ 是增函数. 又当 $x \neq 0$ 时,

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi \begin{cases} < 0, & n \text{ 为正整数,} \\ > 0, & n \text{ 为负整数.} \end{cases}$$

而 $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0$. 故 $f(x)$ 在点 $x_n = \frac{1}{2n\pi} (n=1, 2, \cdots)$ 都达极大值. 由于 $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内不是增函数(作无穷次振荡,如图 2.42 所示).

【1288】 证明定理: 设(1)函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 n 阶可微函数; (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) (k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$; (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 则当 $x > x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证明思路 令 $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则由条件(3)可知

$$F^{(n)}(x) > 0 \quad (x > x_0),$$

从而, $F^{(n-1)}(x)$ 当 $x > x_0$ 时是递增的. 又由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

因此, 当 $x > x_0$ 时, $F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0$. 由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 当 $x > x_0$ 时是递增的. 反复应用条件(2), 命题可获证.

证 设 $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则由于 $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 所以,

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0 \quad (x > x_0).$$

因此, $F^{(n-1)}(x)$ 当 $x > x_0$ 时是递增的. 又由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) - \psi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

因此,

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 当 $x > x_0$ 时是递增的. 再由条件(2)知

$$F^{(n-2)}(x_0) = \varphi^{(n-2)}(x_0) - \psi^{(n-2)}(x_0) = 0, \quad \text{故} \quad F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

依此类推,最后得

$$F(x) > F(x_0) = 0 \quad (x > x_0), \quad \text{即} \quad \varphi(x) > \psi(x) \quad (x > x_0).$$

【1289】 证明下列不等式:

$$(1) \text{ 当 } x \neq 0 \text{ 时, } e^x > 1+x; \quad (2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x;$$

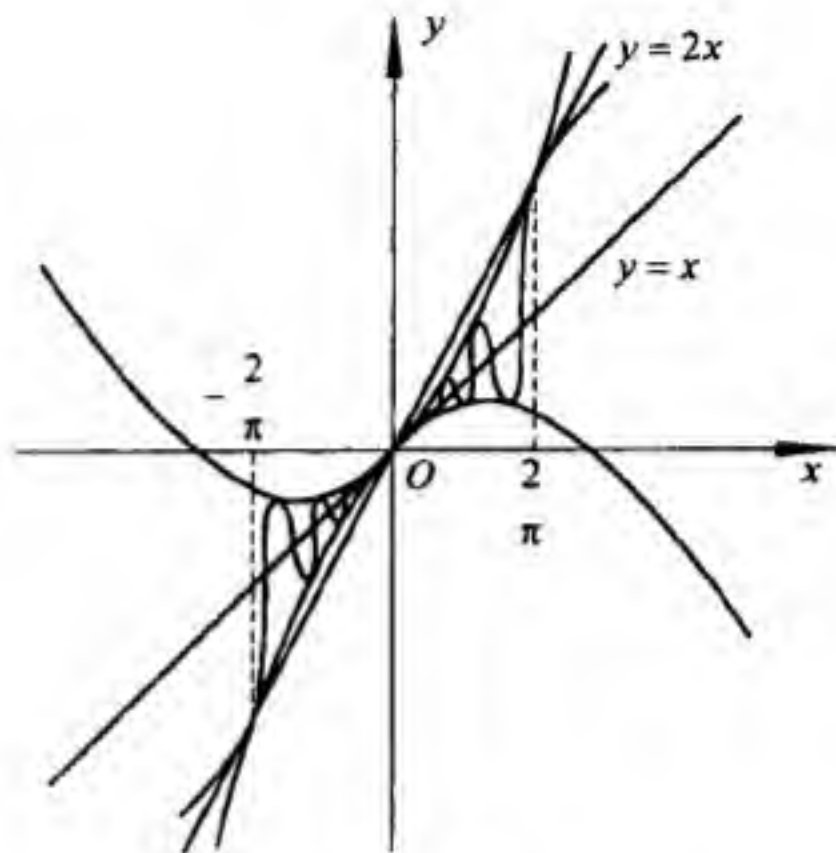


图 2.42

(3) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$; (4) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$;

(5) 当 $x > 0, y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时, $(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$. 给出不等式(1)~(4)的几何解释.

证 (1) 设 $f(x) = e^x - (1+x)$, 则当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以, $f(x) > f(0) = 0$ ($x > 0$), 即 $e^x > 1+x$ ($x > 0$).

同理可证, 当 $x < 0$ 时, $e^x > 1+x$.

总之, 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1+x$.

此不等式的几何意义是, 曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1+x$ 的上方.

如图 2.43 所示.

(2) 设 $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = \ln(1+x)$, 则

$$\varphi'(x) = 1, \quad \psi'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > \psi'(x)$, 即 $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$, 且有 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$,

从而,

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0 \quad (x > 0),$$

即

$$x - \ln(1+x) > 0 \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$.

所以, 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

此不等式表示对数函数 $y = \ln(1+x)$ 的图像介于抛物线 $y = x - \frac{x^2}{2}$

和直线 $y = x$ 之间 ($x > 0$). 如图 2.44 所示.

(3) 令 $F(x) = x - \sin x$, 则

$$F'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad (\text{当 } x > 0, x \neq 2n\pi, n=1,2,\dots \text{ 时}),$$

故 $F(x)$ 当 $x > 0$ 时是递增的. 因此, 当 $x > 0$ 时, 有

$$F(x) > F(0) = 0, \quad \text{从而, } x > \sin x \quad (x > 0).$$

其次再证, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ ($x > 0$). 设

$$\psi_1(x) = x - \frac{x^3}{6}, \quad \varphi_1(x) = \sin x,$$

则有 $\psi_1(0) = \varphi_1(0) = 0, \quad \psi_1'(0) = \varphi_1'(0) = 1$.

又因 $\psi_1''(x) = -x, \quad \varphi_1''(x) = -\sin x$, 于是, 当 $x > 0$ 时, 有 $\varphi_1''(x) > \psi_1''(x)$.

利用 1288 题的结果得知,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0).$$

所以, 当 $x > 0$ 时 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$. 此不等式表示, 在 y 轴的右侧, 曲线 $y = \sin x$ 介于直线 $y = x$ 和曲线 $y = x - \frac{x^3}{6}$ 之间. 如图 2.45 所示.

(4) 令 $f(x) = \tan x - (x + \frac{x^3}{3})$, 则 $f(0) = 0$. 又

$$f'(x) = \frac{1 - \cos^2 x - x^2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x - x \cos x)}{\cos^2 x}$$

显然有

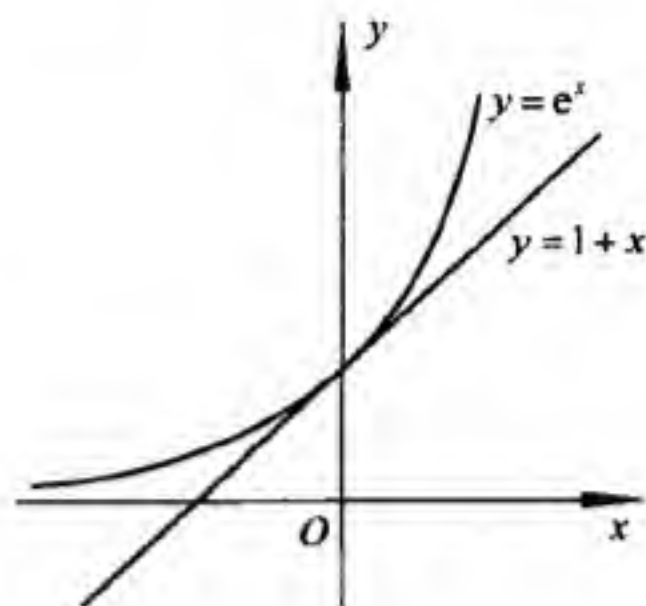


图 2.43

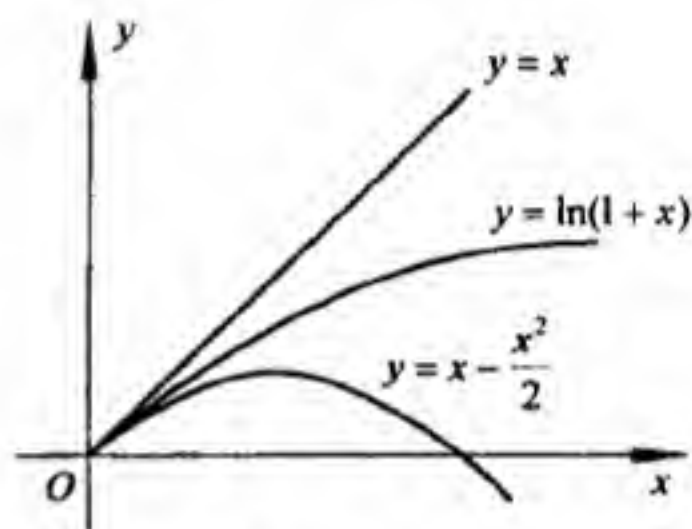


图 2.44

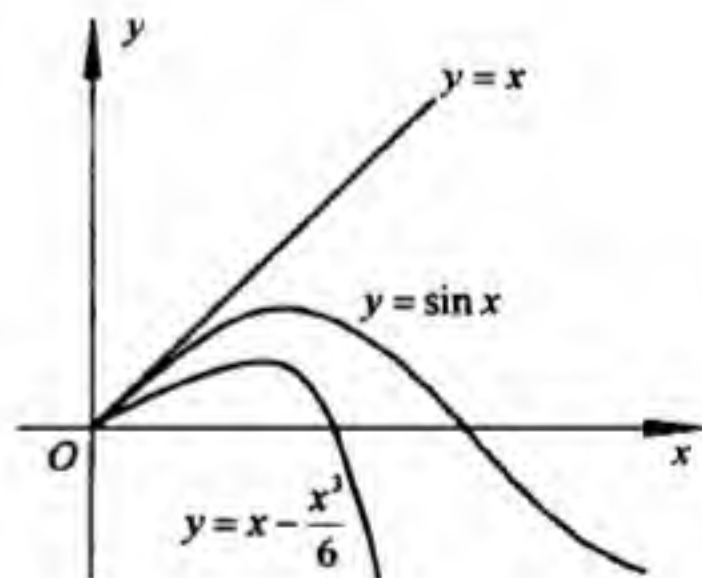


图 2.45

$$\sin x - x \cos x > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

故

$$f'(x) > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

从而, $f(x) > 0$, 即 $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

此不等式表示, 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, 曲线 $y = \tan x$ 在曲线 $y = x + \frac{x^3}{3}$ 的上方.

如图 2.46 所示.

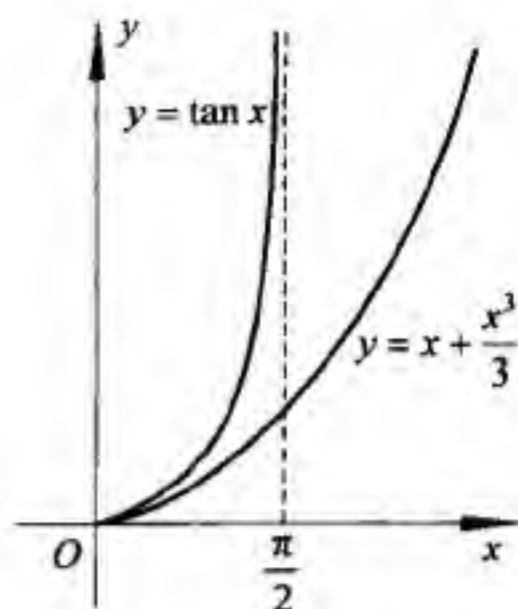


图 2.46

(5) 当 $x=y$ 时, 由 $0 < a < \beta$ 知, 不等式 $2^{\frac{1}{a}} > 2^{\frac{1}{\beta}}$ ($x > 0, y > 0$) 显然成立.

当 $x \neq y$, 且 $x > 0, y > 0$, 不妨设 $0 < \frac{y}{x} < 1$. 令 $a = \frac{y}{x}$, 为证不等式, 只要证明 $f(t) = (1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 递减, 也即

只要证明函数 $F(t) = \frac{1}{t} \ln(1+a^t)$ 递减. 实际上, 因为

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1+a^t)} - \frac{\ln(1+a^t)}{t^2}.$$

当 $a' > 0$ 时, 有 $a' - \frac{a'^2}{2} < \ln(1+a')$, 所以,

$$F'(t) < \frac{a^t \ln a}{t(1+a^t)} - \frac{a' - \frac{a'^2}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$, 所以, $\ln a < 0$ 及 $a' > a^{2t} > \frac{a^{2t}}{2}$, 从而, $F'(t) < 0$,

即 $F(t)$ 是递减的, 从而, 当 $x \neq y$ 时, 不等式

$$(x^a + y^a)^{\frac{1}{a}} > (x^b + y^b)^{\frac{1}{b}}$$

也成立.

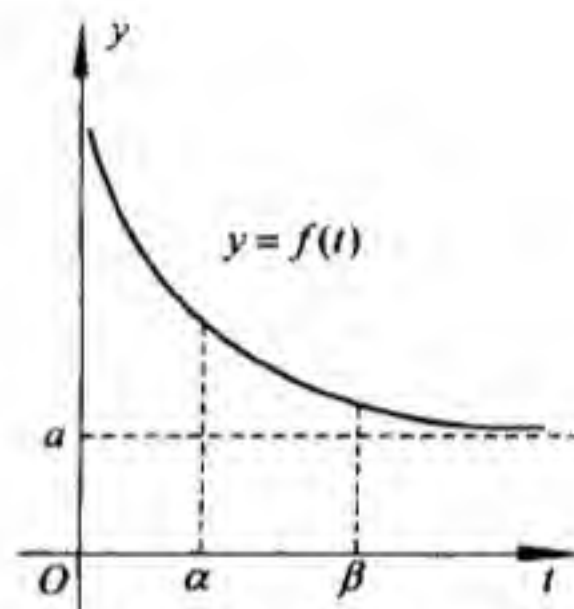


图 2.47

作 $f(t) = (1+a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图像, 如图 2.47 所示. 对于 $(0, +\infty)$ 内任意两个值 α, β ($\alpha < \beta$), 图像上对应点的纵坐标却相应地减小, $f(\alpha) > f(\beta)$.

*) 利用本题(2)的结果.

【1290】 证明: 不等式 $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时成立.

证 不等式的后半部分于 1289 题(3)中已证明, 我们仅证其前半部分.

设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 显然有 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$. 而

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} (x - \tan x),$$

由于当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x > 0$ 及 $\tan x > x + \frac{x^3}{3} > x$, 于是, 在此区间内 $f'(x) < 0$. 所以, 函数 $f(x)$ 在区间

$(0, \frac{\pi}{2})$ 内是递减的. 因而, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$f(x) > f(\frac{\pi}{2}), \quad \text{即} \quad \frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$$

所以, $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$).

【1291】 证明: 当 $x > 0$ 时有不等式 $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$.

证 由于当 $x > 0$ 时, $(1 + \frac{1}{x})^x$ 递增(利用 1280 题的结果), 并且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, 所以,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x > 0$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 递减, 并且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e.$$

所以, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \quad (x > 0).$

【1292】 等差数列与等比数列的项的数目相同且有相同的首项与末项, 并且一切项都是正的. 证明: 等差数列各项的和大于或等于等比数列各项的和.

证 证法 1:

设等差数列各项为 a_1, a_2, \dots, a_n , 公差为 d ; 等比数列各项为 b_1, b_2, \dots, b_n , 公比为 q . 记其和为

$$\sigma = \sum_{k=1}^n a_k, \quad Q = \sum_{k=1}^n b_k.$$

当 $q=1$ 时, 由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=b_n$, 可知有 $\sigma=Q$.

当 $q < 1$ 时, 由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=a_1+(n-1)d, b_n=b_1q^{n-1}$ 且 $a_n=b_n$ 得知

$$a_1 + (n-1)d = b_1q^{n-1}, \quad \text{即} \quad d = -\frac{1-q^{n-1}}{n-1}a_1 \quad (a_1 > 0).$$

则有

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = \sum_{k=1}^n \left[a_1 - \frac{k-1}{n-1}(1-q^{n-1})a_1 \right] = a_1 \left[n - \frac{1}{n-1}(1-q^{n-1}) \sum_{l=0}^{n-1} l \right] \\ &= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}), \end{aligned}$$

$$Q = \sum_{k=1}^n a_1q^{k-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

研究

$$\begin{aligned} \frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q) &= n(1-q)(1+q^{n-1}) - 2(1-q^n) = n(1-q+q^{n-1}-q^n) - 2(1-q^n) \\ &= (n-2)(1-q^n) - nq(1-q^{n-2}). \end{aligned}$$

作函数

$$\varphi(t) = (n-2)(1-t^n), \quad \psi(t) = nt(1-t^{n-2}),$$

则有 $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $\varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n-2)$. 但是,

$$\varphi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-2}, \quad \psi''(t) = -n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $0 < t < 1$ 时, 有 $\psi''(t) < \varphi''(t)$. 利用 1288 题的结果有,

$$\psi(t) < \varphi(t) \quad (0 < t < 1),$$

即当 $q < 1$ 时, $\psi(q) < \varphi(q)$. 从而,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

这就证明了 $\sigma > Q$.

当 $q > 1$ 时, 由 $a_1=b_1$ 及 $a_n=b_n$ 得知

$$d = \frac{q^{n-1}-1}{n-1}a_1 > 0.$$

$$\text{又} \quad \sigma = \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}),$$

$$Q = \sum_{k=1}^n a_1q^{k-1} = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}.$$

与上述讨论相同, 有

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q)=(n-2)(q^n-1)-nq(q^{n-2}-1).$$

作函数

$$\varphi(t)=(n-2)(t^n-1), \quad \psi(t)=nt(t^{n-2}-1),$$

则有

$$\varphi(1)=\psi(1)=0, \quad \varphi'(1)=\psi'(1)=n(n-2).$$

而

$$\varphi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-2}, \quad \psi''(t)=n(n-1)(n-2)t^{n-3},$$

当 $t>1$ 时, 有 $\varphi''(t)>\psi''(t)$, 利用 1288 题的结果有

$$\varphi(t)>\psi(t).$$

于是, 当 $q>1$ 时, 便得 $\varphi(q)>\psi(q)$. 因而,

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q)=\varphi(q)-\psi(q)>0.$$

从而, 完全证明了 $\sigma>Q$.

证法 2:

设等差数列的公差为 d , 等比数列的公比为 q .

如果 $d=0$, 易见两个数列均为常数数列, 因此, 其和相等.

如果 $d \neq 0$, 不妨设 $d>0$ (否则把末项变为首项, 将数列颠倒即成), 由于各项均为正的, 所以, $q>0$.

设首项为 a , 则末项为 $a+nd=aq^n$. 考虑函数

$$f(x)=a+xd-aq^x.$$

由于 $f(0)=f(n)=0$, 所以, 在 $(0, n)$ 内存在一点 c , 使得 $f'(c)=0$, 而 $f''(x)=-aq^x \ln^2 q < 0$. 从而,

$$f'(x)=d-aq^x \ln q$$

为减函数.

所以, 当 $x<c$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x>c$ 时, $f'(x)<0$. 从而, 当 $0 \leq x \leq n$ 时, $f(x) \geq 0$, 其中等号当且仅当 $x=0$ 及 $x=n$ 时成立. 特别是, 对于 $0 < k < n$, 有

$$f(k)=a+kd-aq^k>0, \quad \text{即} \quad a+kd>aq^k.$$

于是, $\sum_{k=0}^n (a+kd) > \sum_{k=0}^n aq^k$.

*) 原题要求证明“大于”. 实际应为“大于或等于”.

【1293】 用不等式 $\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0$, 其中 $x, a_k, b_k (k=1, 2, \dots, n)$ 为实数, 来证明柯西—布尼亚科夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

提示 注意到

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)x + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0,$$

对任何 x 均成立, 由其判别式不能为正, 命题即可获证.

证 由于

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)x + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0,$$

对任何 x 都成立, 故上述二次式的判别式不能为正, 即

$$4\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \leq 0,$$

也即

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

【1294】 证明:正数的算术平均值的平方不大于这些数的平方平均值,即

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

提示 利用 1293 题的结果,并令 $a_k = x_k$, $b_k = \frac{1}{n}$.

证 利用 1293 题的结果,设 $a_k = x_k$, $b_k = \frac{1}{n}$,则有

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

所以, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$

【1295】 证明:正数的几何平均值不大于这些数的算术平均,即

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

提示 应用数学归纳法.

证 设 $G_n = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$, $A_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, 则有

$$(G_n)^n = x_1 x_2 \cdots x_n, \quad nA_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

当 $n=2$ 时,我们已有不等式

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

今假定 $n=k$ 时,有 $G_k \leq A_k$,我们来证 $n=k+1$ 时,有 $G_{k+1} \leq A_{k+1}$.

事实上,

$$G_{k+1} = (x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} = [(G_k)^k \cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \leq (G_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leq (A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}.$$

如果我们设

$$f(x) = x^a - (1-a+ax) \quad (0 < a < 1),$$

由

$$f'(x) = a(x^{a-1} - 1) \begin{cases} > 0, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ < 0, & x > 1, \end{cases}$$

故知 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是递增的,而在 $[1, \infty)$ 上是递减的. 令 $a = \frac{1}{p}$, $1-a = \frac{1}{q}$, 用 $\frac{a}{b}$ 代替 x , 于是,就有下列不等式:

当 $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

令 $A_k = a$, $x_{k+1} = b$, $p = \frac{k+1}{k} > 1$, $q = k+1 > 1$, 且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

所以,

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}.$$

于是,

$$G_{k+1} \leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} = \frac{1}{k+1} (kA_k + x_{k+1}) = \frac{1}{k+1} (x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) = A_{k+1}.$$

从而有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

按照数学归纳法知不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

对于任何正整数 n 均成立.

【1296】 设 a 及 b 为二正数, 则由等式

$$\Delta_s(a, b) = \begin{cases} \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}}, & s \neq 0, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b), & s = 0 \end{cases}$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均值.

例如, 当 $s = -1$ 时得调和平均值, 当 $s = 0$ 时得几何平均值(试证明!); 当 $s = 1$ 时得算术平均值; 当 $s = 2$ 时得平方平均值.

证明: (1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

提示 (2) 考虑 $\frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b)$.

证 先证当 $s = 0$ 时得几何平均数, 由题设知

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}},$$

研究 $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$ 在点 $x = 0$ 的导数, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right\}.$$

另一方面,

$$f'(0) = f'(x) \Big|_{x=0} = \left[\frac{2}{a^x + b^x} \cdot \frac{1}{2} (a^x \ln a + b^x \ln b) \right] \Big|_{x=0} = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b).$$

因此求得

$$\Delta_0(a, b) = e^{f'(0)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均值.

(1) 由于 $2[\min(a, b)]^s \leq a^s + b^s \leq 2[\max(a, b)]^s$, 所以,

$$\min(a, b) \leq \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}} \leq \max(a, b), \quad \text{即} \quad \min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b).$$

(2) 考虑 $\ln \Delta_s(a, b) = \frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}$, 则

$$\frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) = -\frac{1}{s^2} \ln \frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s \ln a + b^s \ln b}{s(a^s + b^s)} = \frac{1}{s^2(a^s + b^s)} \left[(a^s \ln a + b^s \ln b) - (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2} \right].$$

由于 $a^s > 0$, $b^s > 0$, 参看 1314 题(3)的结果知

$$a^s \ln a + b^s \ln b > (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2},$$

所以, $\frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) > 0$, 即 $\ln \Delta_s(a, b)$ 是增函数, 由于对数函数是增函数, 故知函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$. 于是,

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow -\infty} a \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^s \right]^{\frac{1}{s}} = a = \min(a, b),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta_1(a, b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} = b = \max(a, b).$$

【1297】 设 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$ 为二阶可微函数及 $M_k = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty (k=0, 1, 2)$.
证明不等式: $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$.

证 运用 1266 题附注的公式(对任何 h)

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi_1)}{2}h^2 \quad (x \leq \xi_1 \leq x+h), \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(\xi_2)}{2}h^2 \quad (x-h \leq \xi_2 \leq x), \quad (2)$$

(1)减(2),得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^2}{2}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)],$$

即

$$2f'(x)h = f(x+h) - f(x-h) - \frac{h^2}{2}[f''(\xi_1) - f''(\xi_2)].$$

所以,

$$\begin{aligned} 2h|f'(x)| &\leq |2hf'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x-h)| + \frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \\ &\leq 2M_0 + h^2 M_2, \end{aligned}$$

即 $M_2 h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geq 0$.

由于此式对任何 h 都成立,故此二次式的判别式必非正:

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leq 0,$$

即 $|f'(x)|^2 \leq 2M_0 M_2$.

由此可得 $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$. 证毕.

§ 8. 凹凸性. 拐点

1° 凹凸性的充分条件 若曲线 $y=f(x) (a \leq x \leq b)$ 的一段,位于其任意一点的切线之上(或之下),则称这个可微函数 $y=f(x)$ 的图像在闭区间 $[a, b]$ 上是凹*(或对应地,凸)的. 在假设二阶导数 $f''(x)$ 存在的情况下,当 $a < x < b$ 时不等式

$$f''(x) > 0 \quad [\text{或对应地 } f''(x) < 0]$$

成立,为图像是凹(或对应地,凸)的充分条件.

2° 拐点的充分条件 若函数的图像在某点的凹凸性改变,则称此点为拐点.

若在点 x_0 有 $f''(x_0)=0$,或者 $f''(x_0)$ 虽不存在但 $f'(x_0)$ 有意义,并且无论在何种情形下, $f''(x)$ 在 x 经过 x_0 时改变符号,则 x_0 是拐点.

【1298】 研究曲线 $y=1+\sqrt[3]{x}$ 于 $A(-1,0), B(1,2)$ 及 $C(0,0)$ 诸点的凹凸性.

解 $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$

在 $A(-1,0)$ 点, $y'' = \frac{2}{9} > 0$, 故在该点附近曲线的图像是凹的;

在 $B(1,2)$ 点, $y'' = -\frac{2}{9} < 0$, 故在该点附近曲线的图像是凸的;

* 关于凹(凸)的定义仍沿用原书第三版的定义.

在 $C(0,0)$ 点附近, y'' 变号, 因此, 点 C 是拐点. 在 C 点左边 ($x < 0$), $y'' > 0$ 曲线是凹的; 在 C 点右边 ($x > 0$), $y'' < 0$, 曲线是凸的. 注意, 当 $x=0$ 时, y'' 不存在.

求下列函数的图像的凹或凸的区间及拐点:

【1299】 $y = 3x^2 - x^3$.

解 $y' = 6x - 3x^2$, $y'' = 6 - 6x$.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的; $x=1$ 是拐点.

注 或者说, 点 $(1, 2)$ 是拐点. 以后二者通用, 不再说明.

【1300】 $y = \frac{a^2}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$.

解 $y' = -\frac{2a^3 x}{(a^2 + x^2)^2}$, $y'' = -\frac{2a^3(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}$.

当 $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的; 当 $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的; $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

【1301】 $y = x + x^{\frac{5}{3}}$.

解 $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的; 当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的;

$x=0$ 是拐点 (注意, $x=0$ 时, y'' 不存在).

【1302】 $y = \sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $y'' = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$, 图像始终呈凹状. 无拐点.

【1303】 $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x$, $y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的; 当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的;

$x = k\pi$ 是拐点 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

【1304】 $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的; 当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的; $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点.

【1305】 $y = \ln(1+x^2)$.

解 $y' = \frac{2x}{1+x^2}$, $y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的; 当 $|x| > 1$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的; $x = \pm 1$ 是拐点.

【1306】 $y = x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$, $y'' = \frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right)$.

令 $y'' = 0$, 得 $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

当 $e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的; 当 $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的;

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 是拐点 ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

【1307】 $y = x^x \quad (x > 0)$.

解 $y' = x^x(\ln x + 1)$, $y'' = x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right]$. 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图像始终是凹的.

【1308】 证明: 曲线 $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图像.

证 $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}, y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$

令 $y''=0$ 得 $x_1 = -2-\sqrt{3}, x_2 = -2+\sqrt{3}, x_3 = 1,$

对应的函数值为 $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}, y_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{4}, y_3 = 1.$ 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{4} & \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0$$

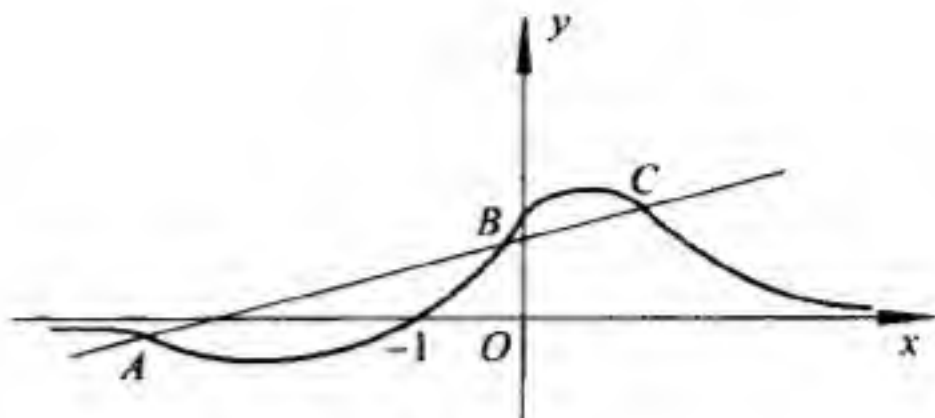


图 2.48

所以, 拐点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$ 在一条直线上(图 2.48).

【1309】 如何选择参量 h , 可使“概率曲线” $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ ($h > 0$) 有拐点 $x = \pm \sigma$?

解 $y' = \frac{-2h^3 x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (4h^4 x^2 - 2h^2),$

令 $y''=0$, 得 $x^2 = \frac{1}{2h^2}$. 由于拐点为 $x = \pm \sigma$, 故有 $h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$, 即 $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ ($\sigma > 0$).

【1310】 研究摆线(旋轮线) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$) 的凹凸性.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot \frac{t}{2},$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3} = -\frac{\csc^2 \frac{t}{2}}{2a(1 - \cos t)} < 0 \quad (2k\pi < t < 2(k+1)\pi, k=0, \pm 1, \dots),$$

故摆线始终呈凸状.

【1311】 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 中二阶可微, 并且:

(1) $f(a) = A > 0$; (2) $f'(a) < 0$; (3) 当 $x > a$, $f''(x) \leq 0$.

证明: 在区间 $(a, +\infty)$ 内方程 $f(x) = 0$ 有而且仅有一个实根.

证 由于 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续且当 $a < x < +\infty$ 时 $f''(x) \leq 0$, 故函数 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是递减的, 于是, 当 $a \leq x < +\infty$ 时, $f'(x) \leq f'(a) < 0$; 由此又知函数 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是递减的. 因此, 在 $(a, +\infty)$ 上至多有一点使 $f(x) = 0$, 即在 $(a, +\infty)$ 上方程 $f(x) = 0$ 至多有一(实)根.

下面再证明必有点 $a < x_0 < +\infty$ 存在, 使 $f(x_0) = 0$. 考虑函数 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ ($a \leq x < +\infty$), 则

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), \quad F''(x) = f''(x) \quad (a \leq x < +\infty).$$

于是, 当 $a < x < +\infty$ 时 $F''(x) \leq 0$, 从而 $F'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是递减的, 但 $F'(a) = 0$, 故当 $a \leq x < +\infty$ 时, $F'(x) \leq F'(a) = 0$; 由此又知 $F(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是递减的, 但 $F(a) = 0$, 因此, 当 $a \leq x < +\infty$ 时, 恒有 $F(x) \leq F(a) = 0$.

令 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a) > 0, f'(a) < 0$, 故 $x^* > a$. 显然,

$$F(x^*) = f(x^*) - f(a) - f'(a) \left[-\frac{f(a)}{f'(a)} \right] = f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*) \leq 0$, 故 $f(x^*) \leq 0$. 于是, 根据连续函数的中间值定理, 知必有 $a < x_0 \leq x^*$ 存在, 使 $f(x_0) = 0$. 证毕.

注 上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$ 代表曲线 $y = f(x)$ (它是凸的) 上的纵坐标与在点 $(a, f(a))$ 处的切线 $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ 上的纵坐标之差, 点 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ 即是此切线与 Ox 轴的交点(图 2.49).

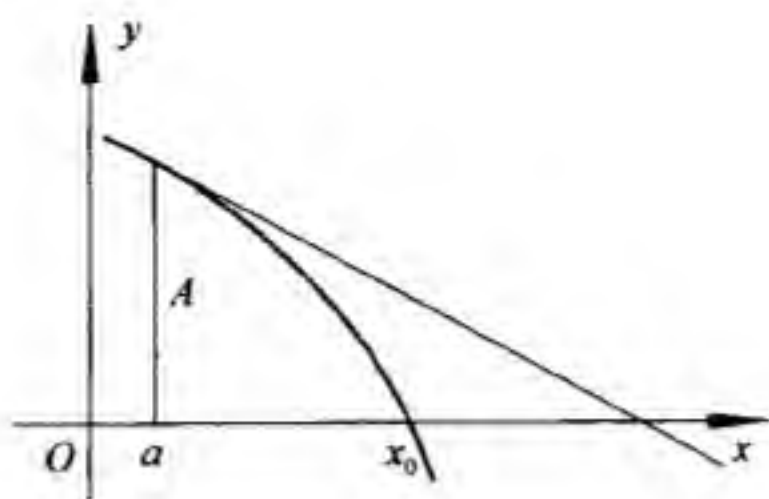


图 2.49

【1312】 若对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(或对应地, 相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是凹(凸)的.

证明: 函数 $f(x)$ (1) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) > 0$, 则在 (a, b) 上是凹的; (2) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) < 0$, 则在 (a, b) 上是凸的.

证 证法 1:

设 x_1, x_2 为 (a, b) 中任意两点, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是, $a < x_1 < x_2 < b$. 考虑 $0 \leq t \leq 1$ 上的函数 $F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$. 显然,

$$F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0, \quad F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

利用中值定理得知: 当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$F'(t) = (x_2 - x_1) f'[(1-t)x_1 + tx_2] - [f(x_2) - f(x_1)] = (x_2 - x_1) \{ f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c) \},$$

其中 $x_1 < c < x_2$. 令 $t_0 = \frac{c-x_1}{x_2-x_1}$, 则 $0 < t_0 < 1$ 且 $c = (1-t_0)x_1 + t_0x_2$. 于是, $F'(t_0) = 0$.

此外, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 有 $F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2]$.

(1) 若 $f''(x) > 0$ ($a < x < b$), 由上式知 $F''(t) > 0$ ($0 \leq t \leq 1$), 故 $F'(t)$ 在 $0 \leq t \leq 1$ 上是递增的, 再注意到 $F'(t_0) = 0$, 即知: 当 $0 \leq t < t_0$ 时 $F'(t) < 0$; 当 $t_0 < t \leq 1$ 时, $F'(t) > 0$. 由此又知: 在 $0 \leq t \leq t_0$ 上 $F(t)$ 是递减的, 在 $t_0 \leq t \leq 1$ 上 $F(t)$ 是递增的. 由此, 再用 $F(0) = 0, F(1) = 0$, 即知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) < 0$. 特别 $F(\lambda_2) < 0$. 但 $F(\lambda_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2)$, 故

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的.

(2) 若 $f''(x) < 0$ ($a < x < b$), 则 $F''(t) < 0$ ($0 \leq t \leq 1$). 和 (1) 情形完全类似地可推知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) > 0$. 特别 $F(\lambda_2) > 0$, 由此即知

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的.

证法 2:

在 (a, b) 内任取两点 x_1 及 x_2 , 使 $a < x_1 < x_2 < b$, 并令 $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, 则由 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 知: $x_1 < t < x_2$.

将函数 $f(x)$ 在 $x=t$ 点按 1266 题解附注的公式展开, 得

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x-t)^2 f''(\xi), \quad (1')$$

其中 $a < t < \xi < x$ 或 $a < x < \xi < t$. 将 $x=x_1$ 及 $x=x_2$ 代入 (1') 式, 得

$$f(x_1) = f(t) + (x_1-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x_1-t)^2 f''(\xi_1), \quad (2')$$

$$f(x_2) = f(t) + (x_2-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x_2-t)^2 f''(\xi_2), \quad (3')$$

其中 ξ_1, ξ_2 分别是界于 x_1, t 及 x_2, t 之间的数. 以 λ_1 乘(2')式, λ_2 乘(3')式, 再相加, 得

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) &= (\lambda_1 + \lambda_2) f(t) + [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) t] f'(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\lambda_1 (x_1 - t)^2 f''(\xi_1) + \lambda_2 (x_2 - t)^2 f''(\xi_2)].\end{aligned}$$

但 $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, 及 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 故

$$[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \frac{1}{2} [\lambda_1 (x_1 - t)^2 f''(\xi_1) + \lambda_2 (x_2 - t)^2 f''(\xi_2)].$$

由于 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, (x_1 - t)^2 > 0, (x_2 - t)^2 > 0$, 所以,

$$[\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)] - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

与 $f''(\xi_1), f''(\xi_2)$ 有同样的正负号.

当 $f''(x) > 0$ 时, 则

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

所以, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是凹的.

当 $f''(x) < 0$ 时, 则

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

所以, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是凸的.

【1313】 证明: 函数 $x^n (n > 1)$, e^x , $x \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是凹的; 而函数 $x^n (0 < n < 1)$, $\ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

提示 利用 1312 题的结果.

证 (1) 设 $y = x^n (n > 1)$, 则 $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, 它在 $(0, +\infty)$ 上是大于零的, 因此, 图像是凹的.

但当 $0 < n < 1$ 时, 则 $y'' < 0$, 故此时图像是凸的.

(2) 对于函数 e^x , 其二阶导数为 e^x , 它始终为正, 因此, 图像是凹的.

(3) 对于函数 $x \ln x$, 其二阶导数为 $\frac{1}{x}$, 它在 $(0, +\infty)$ 内大于零, 因此, 图像是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$, 其二阶导数为 $-\frac{1}{x^2}$, 它始终为负, 因此, 在 $(0, +\infty)$ 内图像是凸的.

【1314】 证明下列不等式, 并解释其几何意义:

$$(1) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(2) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x \neq y);$$

$$(3) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0).$$

证明思路 我们已知: 若函数 $f(x)$ 图像在区间 (a, b) 内是凹的, 则对于 (a, b) 中的任意两点 x 和 y , 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

分别令 $f(x) = x^n, (x > 0, n > 1), f(x) = e^x (-\infty < x < +\infty)$ 及 $f(x) = x \ln x (x > 0)$, 对它们利用 1313 题的结果, 不等式即获证.

证 我们已知, 若函数 $f(x)$ 的图像在区间 (a, b) 内是凹的, 则对于 (a, b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是, 利用 1313 题的结果, 我们有:

(1) 设 $f(x) = x^n, (x > 0, n > 1)$, 则其图像是凹的. 于是, 对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) 设 $f(x) = e^x$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 上图像是凹的. 于是, 对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(3) 设 $f(x) = x \ln x$, 则对于 $x > 0$ 图像是凹的. 于是, 对于任意两点 x 和 y , 得

$$x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是: 连接点 $(x, f(x))$ 及 $(y, f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点 (具有相同横坐标) 的上方.

【1315】 证明: 有界的凸函数处处连续, 并有左导数及右导数.

证 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的, 并设 x_0 为 (a, b) 内的任一点, 今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且有左导数及右导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x - x_0| < \delta$, 使得这邻域全部都包含在 (a, b) 内, 并记

$$M = \min \{ f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta) \}.$$

设 $0 < |x - x_0| < \delta$. 记 $t = \frac{|x - x_0|}{\delta}$, 则 $0 < t < 1$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有 $x = t(x_0 + \delta) + (1-t)x_0$ 及 $x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 - \delta)$. 由于 $f(x)$ 为凸函数, 故有

$$f(x) > tf(x_0 + \delta) + (1-t)f(x_0) \geq tM + (1-t)f(x_0) \quad (1)$$

及

$$f(x_0) > \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 - \delta) \geq \frac{f(x) + tM}{1+t}. \quad (2)$$

由(1), 得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M];$$

由(2), 得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而, $f(x_0) - M > 0$, 且

$$|f(x) - f(x_0)| < t[f(x_0) - M] = \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|. \quad (3)$$

当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 类似地也可导出(3)式, 故当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, (3)式恒成立. 由此显然有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x = x_0 + h$, 则(3)式可改写为

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta} \quad (0 < |h| < \delta). \quad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (-\delta < h < \delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数, 且有 $\varphi(0) = 0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2 , 设有 $0 < t_1 < t_2 < \delta$, 并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质, 有

$$\varphi(t_1) > \frac{t_1}{t_2} \cdot \varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \varphi(0) = \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2),$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2}.$$

这说明函数 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个减函数. 如从 $h \rightarrow +0$ 方向看, 则函数 $F(h)$ 递增. 但由(4)可知 $|F(h)| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta}$, 即 $F(h)$ 在 $0 < |h| < \delta$ 有界, 故极限 $\lim_{h \rightarrow +0} F(h)$ 存在, 也即 x_0 的右导数

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

存在. 同理, 可证左导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中, 对于区间是否有限无关紧要. 证毕.

注 本题不需假定凸函数有界, 证明中也未用到有界这个条件, 参看 E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, § 5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 作为凸函数的定义, 则需加上凸函数有界这个条件, 才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, 70 题和 124 题.

【1316】 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内二阶可微, 且 $f''(\xi) \neq 0$, 其中 $a < \xi < b$. 证明: 在区间 (a, b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2 , 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证 不妨设 $f''(\xi) > 0$. 考察 $f'(\xi)$, 分两种情形:

(1) 若 $f'(\xi) = 0$, 则由 $f''(\xi) > 0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值. 从而存在 $\delta > 0$, 在 $[-\delta + \xi, \xi + \delta] (\subset (a, b))$ 上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降, 在 ξ 的右侧单调上升. 如果 $f(-\delta + \xi) = f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi$, $x_2 = \xi + \delta$, 就满足了题中的等式. 如果 $f(-\delta + \xi) < f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi$, 而在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi + \delta)$ 之间. 由于 $f(x)$ 在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上单调上升, 故存在 $x_2 \in (\xi, \xi + \delta)$, 使 $f(x_2) = f(x_1)$, 从而题中的等式成立. 如果 $f(-\delta + \xi) > f(\xi + \delta)$, 仿前也可取得两点 x_1 及 x_2 , 使 $f(x_1) = f(x_2)$. 这时题中的等式得证.

(2) 若 $f'(\xi) \neq 0$, 则设

$$F(x) = f(x) - f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

且

$$F''(\xi) = f''(\xi) > 0.$$

对于函数 $F(x)$, 应用上述(1)的推证方法, 总存在两点 x_1 及 x_2 , 使 $F(x_1) = F(x_2)$, 也即有

$$f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

从而, 命题得证.

【1317】 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内二阶可微, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

则在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ , 满足

$$f''(\xi) = 0.$$

证 用反证法, 即若不存在 ξ , 使 $f''(\xi) = 0$, 则当 $x > x_0$ 时, 或者 $f''(x) > 0$, 或者 $f''(x) < 0$. 如果不是这样, 即若存在点 a 与 b , 使得 $f''(a) < 0$ 及 $f''(b) > 0$, 则由达布定理^{*}可知, 在 a 与 b 之间必有 c 存在, 使得 $f''(c) = 0$, 这与我们的反证假设矛盾. 因此, 我们不妨设 $f''(x) > 0$, 从而, 函数 $f(x)$ 的图像是凹的, 且位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

与 $f(x)$ 的可微性, 利用 1237 题的结果, 即知: 在 $(x_0, +\infty)$ 中至少存在一点 c_1 , 使

$$f'(c_1) = 0.$$

由 $f''(x) > 0$ 易知 $f'(x)$ 递增, 从而, 当 $x > c_1$ 时, $f'(x) > 0$. 取 $c_2 > c_1$, 则 $f'(c_2) > 0$.

过点 $(c_2, f(c_2))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线, 其方程为

$$Y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = +\infty,$$

而 $f(x)-Y(x)>0$, 从而应有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

这与原设条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$ 矛盾. 同样, 对于 $f''(x)<0$ 的情况也可推出以上结论.

于是, 在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ , 使 $f''(\xi)=0$.

*) 达布定理指: 若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内有有限的导数, 且 $g'(a)g'(b)<0$, 则在 (a, b) 内至少有一点 c , 使

$$g'(c)=0.$$

其证法是: 不妨设 $g'(a)<0, g'(b)>0$, 则在 a 右边且与 a 充分近的点 x , 有 $g(a)>g(x)$; 在 b 左边且与 b 充分近的点 x , 有 $g(x)<g(b)$; 由此可知 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值必在 (a, b) 内某点 c 达到, 从而必有 $g'(c)=0$.

在本题中, 可设 $g(x)=f'(x)$, 则由 $g'(a)=f''(a)<0$ 及 $g'(b)=f''(b)>0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在, 使 $g'(c)=0$, 即 $f''(c)=0$.

§ 9. 不定式的求值法

洛必达法则 情形 1: 不定式 $\frac{0}{0}$ 的求值法. 若: (1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 的某邻域 U 内* 有定义并且连续 (此处 a 为数或符号 ∞), 并且当 $x \rightarrow a$ 时, 这两个函数都趋于零;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在点 a 的邻域 U 内存在 (在点 a 本身可不存在), 并且当 $x \neq a$ 时, 二者不同时为零; (3) 有限或无穷的极限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

情形 2: 不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法. 若: (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于无穷大:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞ ;

(2) 对于异于 a 且属于点 a 的邻域 U 的一切 x 值, 导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在, 并且当 $x \in U$, 及 $x \neq a$ 时,

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0;$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法, 可使不定式 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ 等的求值法化为

* 所谓点 a 的邻域 U , 系指满足下列不等式的数 x 的集合:

(1) $0 < |x-a| < \epsilon$, 若 a 为一个数; (2) $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, 若 a 为符号 ∞ .

这两个基本类型的不定式的求值法.

求出下列各式之值:

【1318】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0).$

【1319】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1.$

【1320】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$

【1321】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 4x - 12 \tan x}{3 \sin 4x - 12 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \sec^2 4x - 12 \sec^2 x}{12 \cos 4x - 12 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cos 4x + \cos x}{\cos^2 x \cos^2 4x} \right) = -2.$

【1322】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3 \sec^2 3x}{\sec^2 x} = 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} \right)^2 = 3 \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 \sin 3x} \right)^2 = \frac{1}{3}.$

【1323】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{2x \tan x + x^2 \sec^2 x}$
 $= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2 \tan^2 x + 2x \tan x + x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2 \frac{x}{\tan x} + \left(\frac{x}{\tan x} \right)^2} = -\frac{1}{3}.$

【1324】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\tan^2 x}} \sec^2 x}{4 \sin x \cos x} = \frac{1}{3}.$

【1325】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x + xe^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + e^x + xe^x}{6x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}.$

【1326】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin t + t \cos t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{t}{\sin t} \cos t} = \frac{1}{2}.$

【1327】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}.$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left[\frac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]}{6x} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 1.\end{aligned}$$

$$\text{【1328】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arctan \sqrt{\frac{x}{b}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x+a} - \frac{b}{x+b}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a}{(x+a)^2} + \frac{b}{(x+b)^2}}{3} = \frac{a-b}{3ab}.\end{aligned}$$

$$\text{【1329】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - a^{\sin x} \cos x) \ln a}{3x^2} = \frac{\ln a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + a^{\sin x} \sin x - a^{\sin x} \ln a \cos^2 x}{2x} \\ &= \frac{\ln a}{6} \lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln^2 a + a^{\sin x} \cos x + a^{\sin x} \ln a \sin x \cos x + a^{\sin x} \ln a \sin 2x - a^{\sin x} \ln^2 a \cos^3 x) = \frac{\ln a}{6}.\end{aligned}$$

$$\text{【1330】 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

$$\text{【1331】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx \cos ax}{b \sin ax \cos bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

*) 利用 1318 题的结果.

$$\text{【1332】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan ax}{b \tan bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \left(\frac{a}{b} \right)^2.$$

$$\text{【1333】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \cdot \sin(\sin x) + \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x) + \cos x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24x} \left[\cos x \sin(\sin x) + \frac{1}{2} \sin 2x \cos(\sin x) + \sin 2x \cos(\sin x) + \cos^3 x \sin(\sin x) - \sin x \right] \\ &= \frac{1}{24} \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\sin x \sin(\sin x) + \cos^2 x \cos(\sin x) + 3 \cos 2x \cos(\sin x) - \frac{3}{2} \cos x \sin 2x \sin(\sin x) \right. \\ &\quad \left. - 3 \cos^2 x \sin x \sin(\sin x) + \cos^4 x \cos(\sin x) - \cos x \right] \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$\text{【1334】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} \right).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}{\sin 2x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh} 2x \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2x}{\cos 2x \operatorname{sh}^2 x + \sin 2x \operatorname{sh} 2x + \operatorname{ch} 2x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sh} 2x + 2 \sin 2x}{-2 \sin 2x \operatorname{sh}^2 x + 3 \cos 2x \operatorname{sh} 2x + 3 \sin 2x \operatorname{ch} 2x + 2 \operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (4 \operatorname{ch} 2x + 4 \cos 2x) (-4 \cos 2x \operatorname{sh}^2 x - 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2x - 6 \sin 2x \operatorname{sh} 2x + 6 \cos 2x \operatorname{ch} 2x + 6 \cos 2x \operatorname{ch} 2x \\
&\quad + 6 \sin 2x \operatorname{sh} 2x + 4 \operatorname{ch} 2x \sin^2 x + 2 \sin 2x \operatorname{sh} 2x)^{-1} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

【1335】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}$ 其中 $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) - \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})}{\operatorname{sh} x - \sin x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} - \frac{\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{-\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \right)}{\operatorname{sh} x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}}{\operatorname{sh} x + \sin x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \sin^2 x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\operatorname{ch} x + \cos x} = 1.
\end{aligned}$$

【1336】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} \quad (\epsilon > 0)$.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\epsilon x^{\epsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\epsilon x^\epsilon} = 0.$$

【1337】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a > 0, n > 0)$.

解题思路 若 n 为正整数, 利用洛必达法则求得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0$. 若 n 不是正整数, 则

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} \quad (x > 1),$$

利用上述结果及夹逼准则.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n x^{n-1}}{a e^{ax}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$$

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数, 则 $[n] < n < [n] + 1$. 于是,

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} \quad (x > 1).$$

而左右两端当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 上面已证明它们的极限为零. 因此, 中间的极限也为零. 于是, 对于任意大于零的实数 a 和 n , 均有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0$.

【1338】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

提示 利用 1337 题的结果.

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

*) 利用 1337 题的结果.

【1339】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}$.

提示 利用 1337 题的结果.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0.01x}} = 0.$$

*) 利用 1337 题的结果.

$$\text{【1340】 } \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \ln^2 x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = 0.$$

$$\text{【1341】 } \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x \quad (\epsilon > 0).$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\epsilon x^{-\epsilon-1}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\epsilon}{\epsilon} = 0.$$

$$\text{【1342】 } \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

提示 注意 $x^x = e^{x \ln x}$, 并利用 1341 题的结果.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^{0 \cdot 0} = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

$$\text{【1343】 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1}$$

提示 利用 1341 题及 541 题的结果.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(x^x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0 \cdot 0, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1 \quad \text{及} \quad \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^2 x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-2x \ln x) = 0,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +0} \{ (e^{x \ln x} - 1) \ln x \} = \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln^2 x \right\} = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{于是, } \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x-1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x} = e^0 = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

$$\text{【1344】 } \lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1).$$

提示 利用 1342 题的结果.

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x^x \ln x} - 1).$$

利用 1342 题的结果, 有 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$, 故得 $\lim_{x \rightarrow +0} e^{x^x \ln x} = 0$, 从而有 $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = -1$.

$$\text{【1345】 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$$

$$\text{解 } \text{由于 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{k}{1+\ln x} \ln x = k \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{x}{1+\ln x}}{\frac{1}{x}} = k, \text{ 所以, } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$$

$$\text{【1346】 } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

$$\text{解 } \text{由于 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1, \text{ 所以, } \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

$$\text{【1347】 } \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}}.$$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi x}{2} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2} \csc^2 \frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi},$

所以, $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2}{\pi}},$

【1348】 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \ln \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{-2 \csc^2 2x} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1,$

所以, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}.$

【1349】 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \ln \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cot x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\csc^2 x}{\cot x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = 0,$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sin x} = e^0 = 1.$

【1350】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln y)}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y \ln y} = 0,$ 所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^0 = 1.$

【1351】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\tan \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} = 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(1+2x)^2}}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1}} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{(1+2x)^3}}{\frac{2\pi}{(1+2x)^2} \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} = -4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+2x) \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} = 0, \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$

【1352】 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right)^{\cot(x-a)}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow a} \cot(x-a) \ln \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \tan x - \ln \tan a}{\tan(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\tan x} \sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a},$

所以, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\tan x}{\tan a} \right)^{\cot(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}} \quad (a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$

【1353】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x - x \ln a) - \ln(b^x - x \ln b)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(a^x - 1) \ln a}{a^x - x \ln a} - \frac{(b^x - 1) \ln b}{b^x - x \ln b}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\frac{a^x \ln^2 a (a^x - x \ln a) - (a^x - 1)^2 \ln^2 a}{(a^x - x \ln a)^2} - \frac{b^x \ln^2 b (b^x - x \ln b) - (b^x - 1)^2 \ln^2 b}{(b^x - x \ln b)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\ln^2 a - \ln^2 b), \end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$

【1354】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(x+2)} = \frac{1}{2}.$

【1355】 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) + x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + 1 + \ln x} = \frac{1}{2}.$

【1356】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.$

【1357】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x) \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - x}{\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + (1+x) \ln(1+x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + \ln(1+x)} = -\frac{1}{2}.$

【1358】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (a^x \ln a - a x^{a-1}) = a^a (\ln a - 1).$

【1359】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right] = e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$
 $= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2}.$

【1360】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right] - a^x \ln a}{2x}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right]^2 + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2} \right] - a^x \ln^2 a \right\} = \frac{1}{a}.$

【1361】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x.$

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2 \arctan x} \cdot \frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1+x^2) \arctan x} \\ &= -\frac{2}{\pi},\end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$

【1362】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\operatorname{th} x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{th} x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th} x \operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2 \operatorname{ch} 2x}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 \operatorname{sh} 2x} = 0.$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th} x)^x = e^0 = 1.$

【1363】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\arcsin x) - \ln x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} - \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{2x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{\left(4x \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \arcsin x + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{2(2-3x^2) \arcsin x + 2x \sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x \arcsin x + \frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}.$

【1364】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2},$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

【1365】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = -\frac{2}{\pi},$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$

【1366】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \operatorname{ch} x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x - \operatorname{th} x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{2} = -1,$

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1}.$

【1367】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{sh} x \left[\frac{1}{m} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{n}-1} \right]} = \frac{1}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = \frac{mn}{n-m}.$

【1368】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{coth} x}.$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{2},$ 所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{coth} x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$

【1369】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} \cdot \frac{\ln(e^x+x)}{x} \right].$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} &= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]^{\frac{1}{3}} = x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + o\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{3} + o(1), \quad \sqrt{x^2+x+1} = x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] = x + \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{2} + o(1), \\ \frac{\ln(e^x+x)}{x} &= \frac{1}{x} \ln[e^x(1+xe^{-x})] = 1 + \frac{1}{x} \ln(1+xe^{-x}) = 1 + o\left(\frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

(这是由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+xe^{-x}) = 0$).

于是,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} \cdot \frac{\ln(e^x+x)}{x} &= \left[x + \frac{1}{3} + o(1) \right] - \left[x + \frac{1}{2} + o(1) \right] \left[1 + o\left(\frac{1}{x} \right) \right] \\ &= \left[x + \frac{1}{3} + o(1) \right] - \left[x + \frac{1}{2} + o(1) + o\left(\frac{1}{x} \right) \right] = -\frac{1}{6} + o(1), \end{aligned}$$

从而有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} \cdot \frac{\ln(e^x+x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{6} + o(1) \right] = -\frac{1}{6}.$$

【1370】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} \right].$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+\frac{a}{x})} = e^{o(\frac{1}{x})} = 1 + o\left(\frac{1}{x} \right)$$

及

$$x^{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}} = x^{-\frac{a}{x(x+a)}} = e^{-\frac{a}{x(x+a)} \ln x} = e^{o(\frac{1}{x})} = 1 + o\left(\frac{1}{x} \right),$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 于是, 得

$$\begin{aligned} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x+a}} = (x+a) \cdot x^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x}} x^{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \left\{ (x+a) \left[1 + o\left(\frac{1}{x} \right) \right] - x \left[1 + o\left(\frac{1}{x} \right) \right] \right\} = x^{\frac{1}{x}} \{ [x+a+o(1)] - [x+o(1)] \} \end{aligned}$$

$$=x^{\frac{1}{2}}[a+o(1)],$$

从而有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x}}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \{x^{\frac{1}{2}}[a+o(1)]\} = a$.

【1371】 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0,0)$ [$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$], 且在此有斜角 α , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \tan \alpha$.

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x=0$ 点有 $f'(0) = \tan \alpha$, 注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 以及 $f'(0)$ 存在, 如果再假定 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续, 则也可用洛必达法则求得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{1} = f'(0) = \tan \alpha.$$

【1372】 若当 $x \rightarrow +0$ 时, 连续曲线 $y=f(x)$ 通过坐标原点 $(0,0)$ [$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$], 并且当 $0 < x < \epsilon$ 时, 此曲线完全位于两直线 $y=-kx$ 及 $y=kx$ ($k \neq \infty$) 所组成的锐角之内, 证明: $\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1$.

提示 注意到 $x \ln x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow +0$), 并利用夹逼准则.

证 当 $x \rightarrow +0$ 时, 有 $x \ln x \rightarrow 0$. 按题设应有

$$-kx \leq f(x) \leq kx \quad (k > 0, 0 < x < \epsilon),$$

而当 $x > 0$ 且很小时, 有 $\ln x < 0$, 故

$$kx \ln x < f(x) \ln x < -kx \ln x,$$

从而有

$$e^{kx \ln x} < e^{f(x) \ln x} < e^{-kx \ln x}.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时, 不等式两端均趋于 $e^0 = 1$, 注意到 $e^{f(x) \ln x} = x^{f(x)}$, 即有 $\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1$.

【1373】 证明: 若函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

证明思路 注意到当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0 \quad \text{及} \quad h^2 \rightarrow 0,$$

且分子及分母 (视为 h 的函数) 都有导数, 而分母的导数 $2h$ 又不为零 ($h \rightarrow 0$, 但 $h \neq 0$), 故对

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ 可使用洛必达法则, 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] = \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x). \end{aligned} \quad (*)$$

注意 若对 (*) 式再使用洛必达法则, 得原式 $= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} [f''(x+h) + f''(x-h)]$. 由于 $f''(x)$ 仅存在而没有假设连续, 故无法获得 $f''(x)$ 的结果. 这一点必须引起读者的注意.

证 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0$ 及 $h^2 \rightarrow 0$, 且分子、分母 (视为 h 的函数) 都有导数, 又注意到分母的导数 $2h \neq 0$ ($h \rightarrow 0$ 但 $h \neq 0$), 故对 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ 可用洛必达法则, 并且继续运算, 最后得证

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] = \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x). \end{aligned}$$

【1374】 研究运用洛必达法则于下列各例的可能性:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}}.$$

提示 (1)及(2)洛必达法则不适用,但是原极限均存在.(3)及(4)不符合运用洛必达法则的条件,且原极限均不存在.

解 (1) 分子、分母分别求导数,得商为 $\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$

此函数当 $x \rightarrow 0$ 时,极限不存在,因此洛必达法则不能适用.但是,原极限是存在的.事实上,函数

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x},$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$ 及 $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 于是, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$

(2) 分子、分母分别求导数,得商为 $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$

当 $x \rightarrow \infty$ 时,上述函数的极限不存在,因此洛必达法则不能适用.但是,原极限是存在的.事实上,有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(3) 如果运用洛必达法则,就有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5e^{-2x} \sin x - 2xe^{-x^2} \sin^2 x + e^{-x^2} \sin 2x}{-2e^{-x} \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} e^{-x} + xe^{-x^2+x} \sin x - e^{-x^2+x} \cos x \right) = 0. \end{aligned}$$

这个结果是错误的.事实上,若取 $x_n = n\pi + \frac{3\pi}{4}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 对于数列 $\{x_n\}$, 原式的分母 $e^{-x_n}(\cos x_n + \sin x_n) = \sqrt{2}e^{-x_n} \cdot \sin\left(x_n + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-(n\pi + \frac{3\pi}{4})} \sin(n+1)\pi = 0$, 而分子不为零,此时原式的极限不存在,从而

对于 $x \rightarrow +\infty$, 原式的极限不存在.原因是在求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时,虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为零,但其导数在数列 $x_n = n\pi (n=1, 2, \dots)$ 上两者同时出现了零点.因此,一方面本题不符合运用洛必达法则的条件;另一方面也不允许在求极限过程中,用 $\sin x$ 作除数,上、下约分后再求极限.

(4) 如果运用洛必达法则,就有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x}[1+\cos 2x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x}[2\cos^2 x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sin x}\left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x \cos x)\right]}. \end{aligned}$$

由于 $e^{\sin x} \geq e^{-1}$, $x+\sin x \cos x \geq x-1$, 故当 $x > 1$ 时,有

$$\left| e^{\sin x} \left[1 + \frac{1}{2\cos x} (x + \sin x \cos x) \right] \right| \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2|\cos x|} (x-1) - 1 \right] \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2} (x-1) - 1 \right] \rightarrow +\infty$$

(当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

从而得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} = 0.$

这个结果是错误的.事实上,对于不同的数列

$$x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{及} \quad x''_n = 2n\pi \quad (n=1, 2, \dots),$$

让 $n \rightarrow +\infty$, 则分别取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1, 从而原极限是不存在的. 原因与(3)的情况类似, 只是注意到 $\cos x$ 在 $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的点列上 ($n=1, 2, \dots$) 取值为零. 因此, 本题不符合运用洛必达法则的条件; 当然也不允许在中间过程里, 用 $\cos x$ 作除数, 上、下约分后再求极限.

【1375】 设有一弓形, 其弦长为 b , 拱高为 h , 半径为 R , 又有内接于此弓形的等腰三角形. 若当 R 不变时弓形的弧长趋于零, 求弓形面积与内接三角形面积之比的极限. 利用所得结果推出弓形面积的近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

提示 设弓形所张的中心角为 α , 则内接等腰三角形面积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right), \quad \text{弓形面积为 } \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha).$$

解 如图 2.50 所示. $AB=b$, $DC=h$, $\angle AOB=\alpha$, $\triangle ABC$ 为内接等腰三角形, 其面积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

弓形面积为 $\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha)$.

当弧长趋于零时, α 趋于零, 于是, 弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限为

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin \alpha)}{R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{4} \cdot \sin \frac{\alpha}{4}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2}{\frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{\alpha}{4}} = \frac{4}{3}.$$

由此得弓形面积的近似公式为 $S \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}bh$.

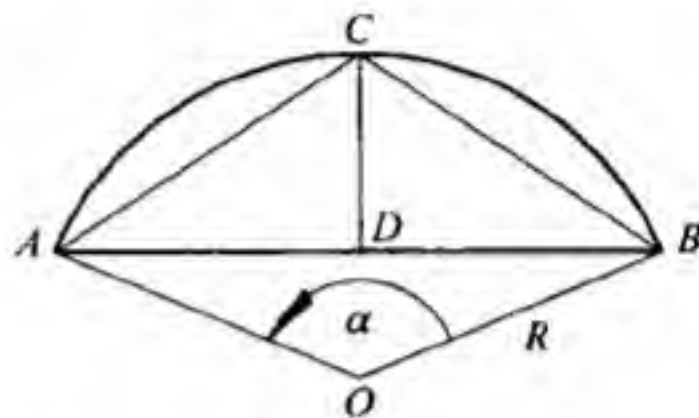


图 2.50

§ 10. 泰勒公式

1° 泰勒局部公式 若: (1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x-x_0| < \epsilon$ 内有定义; (2) 在此邻域内有一直到 $(n-1)$ 阶的导数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) 在点 x_0 存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad (1)$$

其中 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ($k=0, 1, \dots, n$). 特别地, 当 $x_0=0$ 时, 有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o((x)^n). \quad (2)$$

在上述条件下, (1) 式是唯一的.

若在点 x_0 存在导数 $f^{(n+1)}(x_0)$, 则公式(1)中的余项可以取为 $o((x-x_0)^{n+1})$ 的形式.

从泰勒局部公式(2), 得出下列 5 个重要的展开式:

$$\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2° 泰勒公式 若: (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义; (2) $f(x)$ 在此闭区间上有连续的导数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) 当 $a < x < b$ 时, 存在有限的导数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1) \quad (\text{拉格朗日余项}),$$

或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a+\theta_1(x-a)]}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n \quad (0 < \theta_1 < 1) \quad (\text{柯西余项}).$$

【1376】 将多项式 $P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ 改写为二项式 $x+1$ 的非负整数次幂多项式.

$$\text{解 } P'(x) = 3 + 10x - 6x^2, \quad P'(-1) = -13,$$

$$P''(x) = 10 - 12x, \quad P''(-1) = 22,$$

$$P'''(x) = -12, \quad P'''(-1) = -12,$$

$$P^{(4)}(x) = 0, \quad P^{(4)}(-1) = 0,$$

按泰勒公式有

$$P(x) = P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + R_4(x),$$

这里 $R_4(x) = 0$, 即展开式中的余项为零, 将上述结果代入, 即得

$$P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3.$$

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式, 至含有所指阶数的项为止:

【1377】 $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项, $f^{(4)}(0)$ 等于什么?

$$\text{解 } \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = (1+x+x^2) \cdot \frac{(1+x)}{1+x^3} = (1+x)(1+x+x^2) \cdot [1-x^3+o(x^6)]$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4).$$

$$f^{(4)}(0) = 4! \cdot (-2) = -48.$$

【1378】 $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 到含 x^2 的项.

$$\text{解 设 } f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}, \text{ 则}$$

$$f'(x) = \frac{60(1+x)^{99}(1+6x)}{(1-2x)^{41}(1+2x)^{61}},$$

$$f''(x) = \frac{60(1+x)^{98}(65+728x+2196x^2+48x^3)}{(1-2x)^{42}(1+2x)^{62}},$$

而 $f(0) = 1, f'(0) = 60, f''(0) = 3900$. 按泰勒公式就有

$$\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}} = 1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2).$$

【1379】 $\sqrt[m]{a^m+x}$ ($a > 0$) 到含 x^2 的项.

$$\text{解 设 } f(x) = \sqrt[m]{a^m+x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{m}(a^m+x)^{\frac{1-m}{m}}, f''(x) = \frac{(1-m)(a^m+x)^{\frac{1-2m}{m}}}{m^2},$$

而 $f(0) = a, f'(0) = \frac{1}{m}a^{1-m}, f''(0) = \frac{1-m}{m^2}a^{1-2m}$. 于是,

$$\sqrt[m]{a^m+x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

【1380】 $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} \\ + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^3)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}} \\ - 3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}} \\ + \frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}} - \frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

而

$$f(0)=0, \quad f'(0)=0, \quad f''(0)=\frac{1}{3}, \quad f'''(0)=6,$$

于是,

$$\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} = \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3).$$

【1381】 e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

$$\text{解 } e^{2x-x^2} = 1 + (2x-x^2) + \frac{(2x-x^2)^2}{2!} + \frac{(2x-x^2)^3}{3!} + \frac{(2x-x^2)^4}{4!} + \frac{(2x-x^2)^5}{5!} + o(x^5) \\ = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5).$$

【1382】 $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时, 令 $\frac{e^x-1}{x} = 1+\Delta$, 则有

$$\Delta = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是, $\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1+\Delta} = 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 + o(x^4)$.

注意到

$$\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4), \quad \Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \quad \Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4),$$

则得 $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$.

【1383】 $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

$$\text{解 } \sqrt[3]{\sin x^3} = \left[x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15}) \right]^{\frac{1}{3}} = x \left[1 + \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ = x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right)^2 + o(x^{12}) \right] \\ = x - \frac{7}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}).$$

【1384】 $\ln \cos x$ 到含 x^6 的项.

$$\begin{aligned}
\text{解 } \ln \cos x &= \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) = -\frac{1}{2} \left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^4 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^6 + o(x^6) \right] \\
&= -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{45} x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

其中用到: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow 0$), 故 $o(\sin^6 x)$ 可换为 $o(x^6)$.

【1385】 $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

$$\begin{aligned}
\text{解 } \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^4) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^3 + o(x^4) \\
&= x - \frac{1}{3} x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

【1386】 $\tan x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时, 有

$$\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + o(x^6), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \Delta,$$

其中 $\Delta = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ 很小, 易见 $\Delta^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$. 于是,

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + o(x^6) \right) \frac{1}{1 - \Delta} \\
&= \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + o(x^6) \right) (1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4)) \\
&= \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 + o(x^6) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^4) \right) \\
&= x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

【1387】 $\ln \frac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

$$\begin{aligned}
\text{解 } \ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)}{x} \\
&= \ln \left[1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \right] \\
&= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^3 + o(x^8) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).
\end{aligned}$$

【1388】 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照 $x-1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.

$$\text{解 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

于是, $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

【1389】 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按照 $x-1$ 的非负整数次幂展开到含有 $(x-1)^3$ 的项.

$$\text{解 } f'(x) = x^x(1 + \ln x),$$

$$f''(x) = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1},$$

$$f'''(x) = x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1}(1 + \ln x) + x^{x-1} \left(\frac{x-1}{x} + \ln x \right).$$

而 $f(1)=0, f'(1)=1, f''(1)=2, f'''(1)=3$.

于是, $x^x - 1 = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

【1390】 在点 $x=0$ 的邻域中, 用抛物线(二次多项式)近似地代替函数 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (a>0)$.

解 $y|_{x=0} = a, y'|_{x=0} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}|_{x=0} = 0, y''|_{x=0} = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}|_{x=0} = \frac{1}{a}$.

于是, $a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2)$.

【1391】 按分式 $\frac{1}{x}$ 的非负整数次幂展开函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x (x>0)$ 到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项.

解 由于 $\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right) + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$,

于是, $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x = x\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - x = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

【1392】 求函数 $f(h) = \ln(x+h) (x>0)$ 按增量 h 的非负整数次幂的展开式, 到含 h^n 的项(n 为正整数).

解 $\ln(x+h) = \ln\left[x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n)$.

【1393】 设 $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) \quad (0<\theta<1)$, 且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$.

证明: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

证明思路 将 $f(x+h)$ 展开到 h^{n+1} , 并与题设比较, 可得

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}).$$

再利用高阶导数的定义即获证.

证 按题设, 我们有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0<\theta<1$. 又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在, 故

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}).$$

比较上面两式, 得

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}),$$

从而有

$$\theta \cdot \frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + n! \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}.$$

由于 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+\theta h) - f^{(n)}(x)}{\theta h} = f^{(n+1)}(x) \neq 0$, 故由上式知 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 存在, 并且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{\frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \frac{1}{n+1}.$$

【1394】 估计下列近似公式的绝对误差:

$$(1) e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1; \quad (2) \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2};$$

$$(3) \tan x \approx x + \frac{x^3}{3}, \quad \text{当 } |x| \leq 0.1; \quad (4) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1.$$

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

(1) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leq x \leq 1$, 得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e.$$

于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(2) 由 $f(x) = \sin x$, 得

$$|f^{(5)}(\theta x)| = \left| \sin\left(\theta x + \frac{5}{2}\pi\right) \right| \leq 1.$$

于是, 当 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(3) 由 $f(x) = \tan x$, 得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24 \sin x}{\cos^5 x} - \frac{8 \sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{16}{\cos^2 x} + \frac{120 \sin^2 x}{\cos^6 x},$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{32 \sin x}{\cos^3 x} + \frac{240 \sin x}{\cos^5 x} + \frac{720 \sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$ 是偶函数, 又当 $0 \leq x \leq 0.1$ 时, $f^{(6)}(x) \geq 0$, 所以, $f^{(5)}(x)$ 在 $x = \pm 0.1$ 处达到最大值, 注意到

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

及

$$\cos^2 0.1 = 1 - \sin^2 0.1 > 0.9, \quad |f^{(5)}(x)| \leq \frac{16}{0.9} + \frac{120 \times 0.1^2}{0.9^3} < 20.$$

于是,

$$|R_5(x)| \leq \frac{0.1^5}{5!} \times 20 < 2 \times 10^{-6}.$$

(4) 由 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 及 $0 \leq x \leq 1$, 得

$$|f'''(x)| = \frac{3}{8} \left| \frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} \right| \leq \frac{3}{8}.$$

于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|R_3(x)| \leq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{16}.$$

【1395】 近似公式 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ 对于怎样的 x 精确到 0.0001.

解 误差 $\Delta \leq \frac{|x|^4}{4!}$, 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!} < 0.0001$, 于是, $|x| < 0.22134$ (弧) $= 12^\circ 41'$.

【1396】 利用泰勒公式近似地计算并估计误差:

(1) $\sqrt[3]{30}$;

(2) $\sqrt[5]{250}$;

(3) $\sqrt[12]{4000}$;

(4) \sqrt{e} ;

(5) $\sin 18^\circ$;

(6) $\ln 1.2$;

(7) $\arctan 0.8$;

(8) $\arcsin 0.45$;

(9) $(1.1)^{1.2}$.

解 (1) $\sqrt[3]{30} = 3 \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} \left(\frac{1}{9}\right)^2\right] \approx 3.1070$;

$$\Delta < 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

$$(2) \quad \sqrt[5]{250} = 3 \left(1 + \frac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 3 \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{2!} \left(\frac{7}{243}\right)^2\right] \approx 3.0171;$$

$$\Delta < 3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{7}{243}\right)^3 \approx 3.45 \times 10^{-6}.$$

$$(3) \quad \sqrt[12]{4000} = 2 \left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{12}} \approx 2 \left(1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{128}\right) \approx 1.9960;$$

$$\Delta < \left(\frac{3}{128}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{3}{128}} \approx 5.625 \times 10^{-4}.$$

$$(4) \quad \sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 1.64872;$$

$$\Delta = \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \dots < \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} \approx 1.7 \times 10^{-6}.$$

$$(5) \quad \sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \approx 0.309017,$$

$$\Delta < \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^7 \approx 6 \times 10^{-8}.$$

$$(6) \quad \ln 1.2 = \ln(1 + 0.2) \approx 0.2 - \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4 + \frac{1}{5} (0.2)^5 - \frac{1}{6} (0.2)^6 + \frac{1}{7} (0.2)^7 \approx 0.182322;$$

$$\Delta < \frac{1}{8} (0.2)^8 \approx 3.2 \times 10^{-7}.$$

$$(7) \quad \arctan 0.8 \approx 0.8 - \frac{1}{3} (0.8)^3 + \frac{1}{5} (0.8)^5 - \frac{1}{7} (0.8)^7 + \dots - \frac{1}{39} (0.8)^{39} \approx 0.67474 (\text{弧度}) \approx 38^\circ 39' 35'';$$

$$\Delta < \frac{1}{41} (0.8)^{41} \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

$$(8) \quad \arcsin 0.45 \approx 0.45 + \frac{1}{2 \cdot 3} (0.45)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} (0.45)^5 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13} (0.45)^{13} \approx 0.46676 (\text{弧度}) \approx 26^\circ 44' 37'';$$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15} (0.45)^{15} + \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17} (0.45)^{17} + \dots$$

$$< \frac{1}{15} (0.45)^{15} [1 + (0.45)^2 + \dots] < \frac{1}{15} (0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1 - (0.45)^2} \approx 5.26 \times 10^{-7}.$$

(9) 事实上, 只要计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1 + 0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} + \dots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953.$$

取五项, 所以 $(1.1)^{1.2} = e^{1.2 \ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953} \approx 1.12117$;

$$\Delta = \frac{1}{4!} e^{1.2 \times 0.0953} (0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

【1397】 计算:

- (1) e 精确到 10^{-9} ; (2) $\sin 1^\circ$ 精确到 10^{-8} ; (3) $\cos 9^\circ$ 精确到 10^{-5} ;
(4) $\sqrt{5}$ 精确到 10^{-4} ; (5) $\lg 11$ 精确到 10^{-5} .

解 (1) $\Delta = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}.$

要 $\Delta < 10^{-9}$, 只要 $n!n > 10^9$, 即只要 $n \geq 11$. 于是,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281828.$$

$$(2) \Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-8}$, 只要 $\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1} < 10^{-8}$, 即只要 $n \geq 3$. 于是,

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \approx 0.01745241.$$

$$(3) \Delta < \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只要 $\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n} < 10^{-5}$, 即只要 $n \geq 3$. 于是,

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 \approx 0.98769.$$

$$(4) \sqrt{5} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta < \frac{2 \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$, 只要 $\frac{2 \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} < 10^{-4}$, 即只要 $n \geq 4$. 于是,

$$\sqrt{5} \approx 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2! \cdot 2^2} \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \left(\frac{1}{4} \right)^3 \right] \approx 2.2361.$$

$$(5) \lg 11 = 1 + \lg(1+0.1), \quad \Delta < \frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只要 $\frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1} < 10^{-5}$, 即只要 $n \geq 4$. 于是,

$$\lg 11 \approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2} (0.1)^2 + \frac{1}{3} (0.1)^3 - \frac{1}{4} (0.1)^4 \right] \cdot \frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.$$

利用展开式 I ~ V, 求下列极限:

$$\text{【1398】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^5) \right]}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \right) x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{【1399】} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right] \cdot \left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right] - x(1+x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{【1400】} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) + \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) - 2 \right] \end{aligned}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = -\frac{1}{4}.$$

【1401】 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{3}.$

【1402】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} \right].$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x^3 \left(1 + \frac{1}{2x^6} - \frac{1}{8x^{12}} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right) \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{6}.$

【1403】 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x - a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x - a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln a} + e^{-x \ln a} - 2}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} \left[(1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)) + (1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2)) - 2 \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} [\ln^2 a + o(1)] = \ln^2 a \quad (a > 0).$

【1404】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right].$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}.$

【1405】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x + o(x^4)}{1 + o(x^2)} = 0.$

【1406】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} + o(x^2) \right] = \frac{1}{3}.$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求出无穷小量 y 的形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, 设:

【1407】 $y = \tan(\sin x) - \sin(\tan x).$

解 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + \dots.$

从而,

$$\begin{aligned} y &= \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{2}{15} \sin^5 x + \frac{1}{35} \sin^7 x + o(\sin^7 x) \right) \\ &\quad - \left(\tan x - \frac{1}{3!} \tan^3 x + \frac{1}{5!} \tan^5 x - \frac{1}{7!} \tan^7 x + o(\tan^7 x) \right) \\ &= \left[\left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right) + \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{15} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^5 + \frac{1}{35} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^7 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right) - \frac{1}{3!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^3 \right. \\
& \left. + \frac{1}{5!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^5 - \frac{1}{7!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{35} + o(x^7) \right)^7 + o(x^7) \right] \\
& = \frac{x^7}{30} + o(x^7),
\end{aligned}$$

故 y 的主项为 $\frac{x^7}{30}$.

【1408】 $y = (1+x)^x - 1$

解 $y = e^{x \ln(1+x)} - 1 = e^{x \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]} - 1 = e^{x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)} - 1$
 $= 1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right] + o \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \right) - 1 = x^2 + o(x^2),$

故主项为 x^2 .

【1409】 $y = 1 - \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

解 $y = 1 - e^{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1} = 1 - e^{\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - 1} = 1 - e^{-\frac{x}{2} + o(x)}$
 $= 1 - \left[1 + \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) + o \left(-\frac{x}{2} + o(x) \right) \right] = \frac{x}{2} + o(x),$

故主项为 $\frac{x}{2}$.

【1410】 当选择怎样的系数 a 与 b 时, 量 $x - (a + b \cos x) \sin x$ 对于 x 为 5 阶无穷小?

提示 将量 $x - (a + b \cos x) \sin x = x - a \sin x - \frac{b}{2} \sin 2x$ 展开到 x^5 .

解 $x - (a + b \cos x) \sin x = x - a \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] - \frac{b}{2} \left[2x - \frac{1}{3!} (2x)^3 + \frac{1}{5!} (2x)^5 + o(x^5) \right]$
 $= (1 - a - b)x + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3} \right) x^3 - \left(\frac{a}{120} + \frac{2b}{15} \right) x^5 + o(x^5).$

要此量对于 x 为 5 阶无穷小, 当且仅当

$$\begin{cases} 1 - a - b = 0, \\ \frac{a}{6} + \frac{2b}{3} = 0. \end{cases}$$

解之, 得 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$.

【1411】 假设 $|x|$ 为小量, 推出下列各式的简单的近似公式:

(1) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} \quad (R > 0);$ (2) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$
(3) $\frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right];$ (4) $\frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$

解 (1) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{R} \right)^{-2} \right] \approx \frac{1}{R^2} \left[1 - 1 + \frac{2x}{R} \right] = \frac{2x}{R^3};$

(2) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(1 - \frac{2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \left[1 + \frac{2x}{3(1-x)} \right] - \left[1 - \frac{2x}{3(1+x)} \right]$
 $= \frac{4x}{3(1-x^2)} \approx \frac{4}{3}x;$

(3) $\frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right] \approx \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 - \frac{nx}{100} \right) \right] = \frac{nA}{100};$

(4) $\frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)} = \frac{\ln 2}{\frac{x}{100} - \frac{x^2}{20000} + \dots} \approx \frac{\ln 2}{\frac{x}{100}} = \frac{100 \ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$

【1412】 假设 x 的绝对值为小量, 推出形如 $x = \alpha \sin x + \beta \tan x$ 且精确到 x^5 项的近似公式. 应用此公式近似地求小角度的弧长.

提示 仿 1410 题的解法.

$$\begin{aligned} \text{解 } x &= \alpha \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right] + \beta \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right] \\ &= (\alpha + \beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right)x^3 + \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right)x^5 + o(x^5), \end{aligned}$$

所以

$$(1 - \alpha - \beta)x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right)x^3 - \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right)x^5 + o(x^5) = 0.$$

$$\text{要此近似公式精确到 } x^5 \text{ 项, 当且仅当 } \begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0. \end{cases} \quad \text{解之, 得 } \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}.$$

于是, 近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x;$$

弧长 = 中心角 \times 半径, 设中心角为 x , 半径为 R , 则弧长 $= Rx \approx \frac{2R}{3} \sin x + \frac{R}{3} \tan x$, 此即小角度的弧长的近似公式.

【1413】 估计下面的切比雪夫法则的相对误差: 圆弧长近似地等于

以此弧的弦为底, 以其拱高的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$ 为高的等腰三角形两腰的和.

解 如图 2.51 所示

$$BC = R \sin \alpha, \quad BC^2 = R^2 \sin^2 \alpha = \frac{R^2}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}} EC = \sqrt{\frac{4}{3}} R (1 - \cos \alpha),$$

$$DC^2 = \frac{4}{3} R^2 (1 - 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha) = R^2 \left(2 - \frac{8}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} \cos 2\alpha \right).$$

于是,

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + DC^2 = R^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3} \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos 2\alpha \right) \\ &= R^2 \left\{ \frac{5}{2} - \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{24} \alpha^4 - \frac{1}{720} \alpha^6 \right) + \frac{1}{6} \left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha^4 - \frac{4}{45} \alpha^6 \right) \right\} + o(\alpha^7) \\ &= R^2 \left(\alpha^2 - \frac{1}{90} \alpha^6 \right) + o(\alpha^7) = R^2 \alpha^2 \left[1 - \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^4) \right] = R^2 \alpha^2 [1 - \Delta], \end{aligned}$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^4)$.

$$BD = R\alpha \sqrt{1 - \Delta} = R\alpha \left[1 - \frac{1}{2} \Delta + o(\Delta^2) \right] = R\alpha \left[1 - \frac{1}{180} \alpha^4 + o(\alpha^4) \right],$$

从而得

$$|\widehat{BE} - BD| = \left| R\alpha - R\alpha \left[1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^4) \right] \right| = \frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5).$$

因此, 所求的相对误差为

$$\left| \frac{\widehat{AB} - (AD + DB)}{\widehat{AB}} \right| = \left| \frac{2\widehat{BE} - 2BD}{2\widehat{BE}} \right| = \frac{|\widehat{BE} - BD|}{|\widehat{BE}|} = \frac{\frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^4).$$

可见 α 愈小, 相对误差就愈小, 就愈精确.

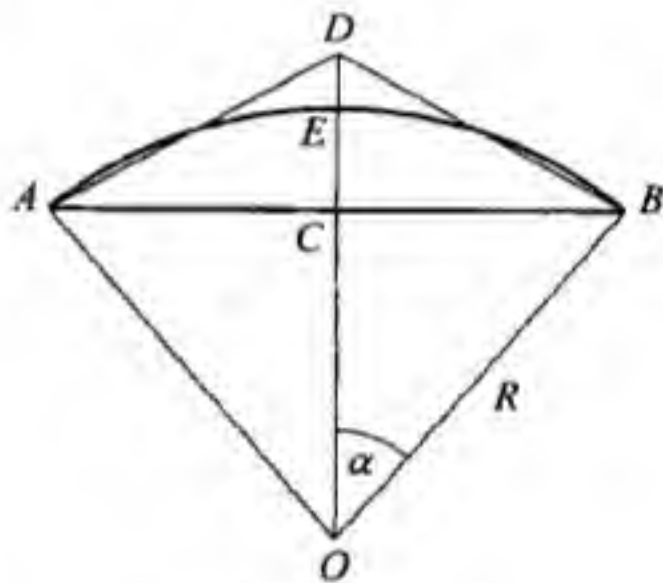


图 2.51

§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

1° 极值存在的必要条件 若函数在点 x_0 的双侧邻域中有定义, 并且对于某区域 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x , 下列不等式分别成立:

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值). 在有极值的点导数 $f'(x_0) = 0$ (若它存在).

2° 极值存在的充分条件

第一法则: 若

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的, 且在点 x_0 , 导数 $f'(x_0) = 0$ 或不存在(临界点);

(2) $f(x)$ 在区域 $0 < |x - x_0| < \delta$ 内有有限的导数 $f'(x)$;

(3) 导数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号, 则函数 $f(x)$ 的性质可用下表表示出来:

	导数的符号		结 论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无极值
II	+	-	极大值
III	-	+	极小值
IV	-	-	无极值

第二法则: 若函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$, 并且在点 x_0 下列条件成立:

$$f'(x_0) = 0 \text{ 与 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值, 并且当 $f''(x_0) < 0$ 时有极大值, 当 $f''(x_0) > 0$ 时有极小值.

第三法则: 设函数 $f(x)$ 在某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$, 在点 x_0 有导数 $f^{(n)}(x_0)$, 并且

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = \dots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

这时: (1) 若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值, 并且当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时有极大值; 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值; (2) 若 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3° 绝对极值 在闭区间 $[a, b]$ 上, 连续函数 $f(x)$ 或者在其临界点(就是导数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点)达到最大(最小)值, 或者在所给闭区间的端点 a 和 b 达到最大(最小)值.

研究下列函数的极值:

【1414】 $y = 2 + x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$. 由于 $y'' = -2 < 0$, 所以, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 y 取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

【1415】 $y = (x-1)^3$.

解 由于 $y' = 3(x-1)^2 > 0$ (除 $x=1$ 外), 即函数始终上升, 故函数 y 无极值.

【1416】 $y = (x-1)^4$.

解 $y' = 4(x-1)^3$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 当 $x < 1$ 时 $y' < 0$, 当 $x > 1$ 时 $y' > 0$, 所以, 函数 y 当 $x = 1$ 时取极小值 $y = 0$.

【1417】 $y = x^m(1-x)^n$ (m 及 n 为正整数)

解题思路 要区分下列四种情况:

(1) 在 $x=0$ 处, 若 m 为偶数.

(2) 在 $x=0$ 处, 若 m 为奇数.

(3) 在 $x=\frac{m}{m+n}$ 处, 不论 m, n 是奇数还是偶数.

(4) 在 $x=1$ 处, 若 n 为偶数或若 n 为奇数.

解 $y' = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$, 由 $y'=0$ 得 $x=0, x=1, x=\frac{m}{m+n}$.

(1) 若 m 为偶数, 则当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$, 当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 所以, 函数 y 在 $x=0$ 处有极小值 $y=0$.

(2) 若 m 为奇数, 则 y' 在 $x=0$ 邻近不变号, 故无极值.

(3) 不论 m, n 是奇数还是偶数时, 由于当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$, 当 $\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时, $y' < 0$,

所以, 函数 y 在 $x=\frac{m}{m+n}$ 处有极大值 $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

(4) 同理, 容易得知: 若 n 为偶数时, 则当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$. 若 n 为奇数, 则当 $x=1$ 时函数 y 无极值.

【1418】 $y = \cos x + \operatorname{ch} x$.

解 $y' = -\sin x + \operatorname{sh} x$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$. 由于

$$y'' = -\cos x + \operatorname{ch} x, y''(0) = 0, y''' = \sin x + \operatorname{sh} x, y'''(0) = 0, y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, y^{(4)}(0) = 2 > 0,$$

所以, 当 $x=0$ 时有极小值 $y=2$.

【1419】 $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(x+1)^9(9-x)$, 令 $y'=0$, 得 $x=-1$ 或 $x=9$. 由于

当 $x < -1$ 时, $y' < 0$, 当 $-1 < x < 9$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 9$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x=-1$ 时有极小值 $y=0$; 当 $x=9$ 时有极大值 $y=10^{10} e^{-9} \approx 1234000$.

【1420】 $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n 为正整数).

提示 同 1417 题, 要讨论 n 的奇偶性.

解 $y' = -\frac{1}{n!} e^{-x} x^n$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$.

(1) 若 n 为偶数, 由于 $y' < 0$ (除 $x=0$ 外), 故当 $x=0$ 时函数 y 无极值.

(2) 若 n 为奇数, 则当 $x < 0$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 0$ 时, $y' < 0$, 所以, 当 $x=0$ 时有极大值 $y=1$.

【1421】 $y = |x|$.

提示 注意函数 $y = |x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 因此, 无法使用导数来求极值. 但可以直接从极值的定义出发, 求得在 $x=0$ 处函数有极小值 $y=0$.

解 当 $x=0$ 时, 得 $y=0$, 又在 $x=0$ 的邻域内对于任意 $x \neq 0$, 恒有 $y = |x| > 0$, 所以, 当 $x=0$ 时函数有极小值 $y=0$. 注意, $y'|_{x=0}$ 不存在.

【1422】 $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$, 令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{3}$. 因为

当 $x < 0$ 时, $y' > 0$, 当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $y' > 0$, 当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $y' < 0$, 当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x=0$ 时无极值; 当 $x=\frac{1}{3}$ 时有极大值 $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4} \approx 0.529$; 当 $x=1$ 时有极小值 $y=0$.

【1423】 设 $f(x) = (x-x_0)^n \varphi(x)$ (n 为正整数),

其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x=x_0$ 时连续, 且 $\varphi(x_0) \neq 0$. 研究此函数在点 $x=x_0$ 的极值.

解题思路 由于 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续且 $\varphi(x_0) \neq 0$, 故在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(x_0)$ 同号, 且 $f(x_0)=0$. 因此, $f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性及 $\varphi(x_0)$ 的符号有关. 为此, 可直接从极值的定义出发, 对 n 为奇数或偶数及 $\varphi(x_0)$ 的正负, 分别求极值.

解 由于 $\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续且 $\varphi(x_0) \neq 0$, 所以, $\varphi(x)$ 在点 x_0 的充分小邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内与 $\varphi(x_0)$ 同号. 于是, $f(x)$ 的符号与 n 的奇偶性及 $\varphi(x_0)$ 的符号有关.

(1) 若 n 为奇数, 则当 x 经过 x_0 时, 函数 $f(x)$ 的值变号, 所以, 在 $x=x_0$ 时没有极值.

(2) 若 n 为偶数, 则 $(x-x_0)^n > 0$ ($x \neq x_0$). 因而当 $\varphi(x_0) > 0$ 时, 则

$$f(x) > f(x_0) = 0 \quad (0 < |x-x_0| < \delta),$$

所以, 当 $x=x_0$ 时有极小值 $f(x_0)=0$.

当 $\varphi(x_0) < 0$ 时, 则

$$f(x) < f(x_0) = 0 \quad (0 < |x-x_0| < \delta),$$

所以, 当 $x=x_0$ 时有极大值 $f(x_0)=0$.

【1424】 设 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ 及 x_0 为函数 $f(x)$ 的临界点, 即 $P_1(x_0)=0$, $Q(x_0) \neq 0$.

证明: $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0)$.

提示 容易求得 $f''(x_0) = \frac{P'_1(x_0)}{Q^2(x_0)}$, 且注意 $Q^2(x_0) > 0$, 故有 $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0)$.

证 因为

$$f''(x) = \frac{P'_1(x)Q^2(x) - 2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^4(x)},$$

于是,

$$f''(x_0) = \frac{P'_1(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

由于 $Q^2(x_0) > 0$, 所以有 $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P'_1(x_0)$.

【1425】 可否断定: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值, 则在此点某充分小邻域内, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧递增, 而在其右侧递减?

提示 不能断定. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

在点 $x=0$ 有极大值 $f(0)=2$, 但在该点的充分小邻域内 $f(x)$ 为振荡的. 即时递增时递减.

解 不能断定. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x) - f(0) = -x^2(2 + \sin \frac{1}{x}) < 0$ ($x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$).

所以, 在点 $x=0$ 有极大值 $f(0)=2$. 易知

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} - 2x(2 + \sin \frac{1}{x}) \quad (x \neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负, 故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的 (即时递增时递减).

【1426】 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 有极小值, 尽管 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n=1, 2, \dots$).

作出此函数的图像.

证 在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0)=0$ ($n=1,2,\dots$). 由于

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又当 x 经过点 $x=0$ $f'(x)$ 从负变到正, 故 $f(0)=0$ 为极小值.

令 $f''(x)=0$ 解得拐点

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

又由 $f(x)=f(-x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=1$ 可知, $f(x)$ 为偶函数, $y=1$ 为渐近线

(图 2.52).

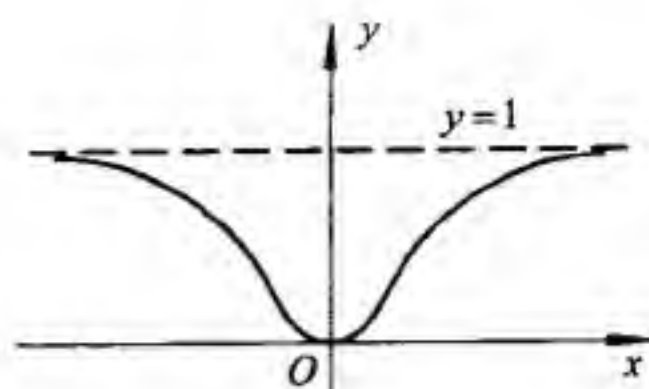


图 2.52

【1427】 研究下列函数的极值并作出其图像:

$$(1) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解 由于 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$, $\left| \cos \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}} > 0$, 所以, 对于 (1) 和 (2) 均有 $f(x) > f(0)$ ($x \neq 0$), 故当 $x=0$ 时这两个函数均有极小值 $f(0)=0$. 对于 $x \neq 0$, (1) 和 (2) 均存在 $f'(x)$, 但易知 $f'(x)=0$ 无解, 因而无其他极值.

它们的图像分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

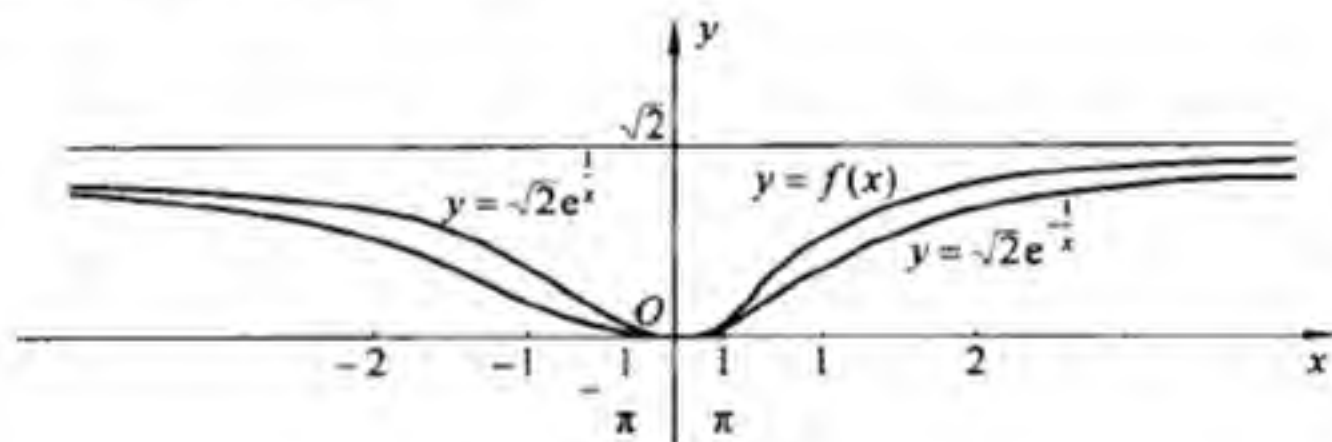


图 2.53

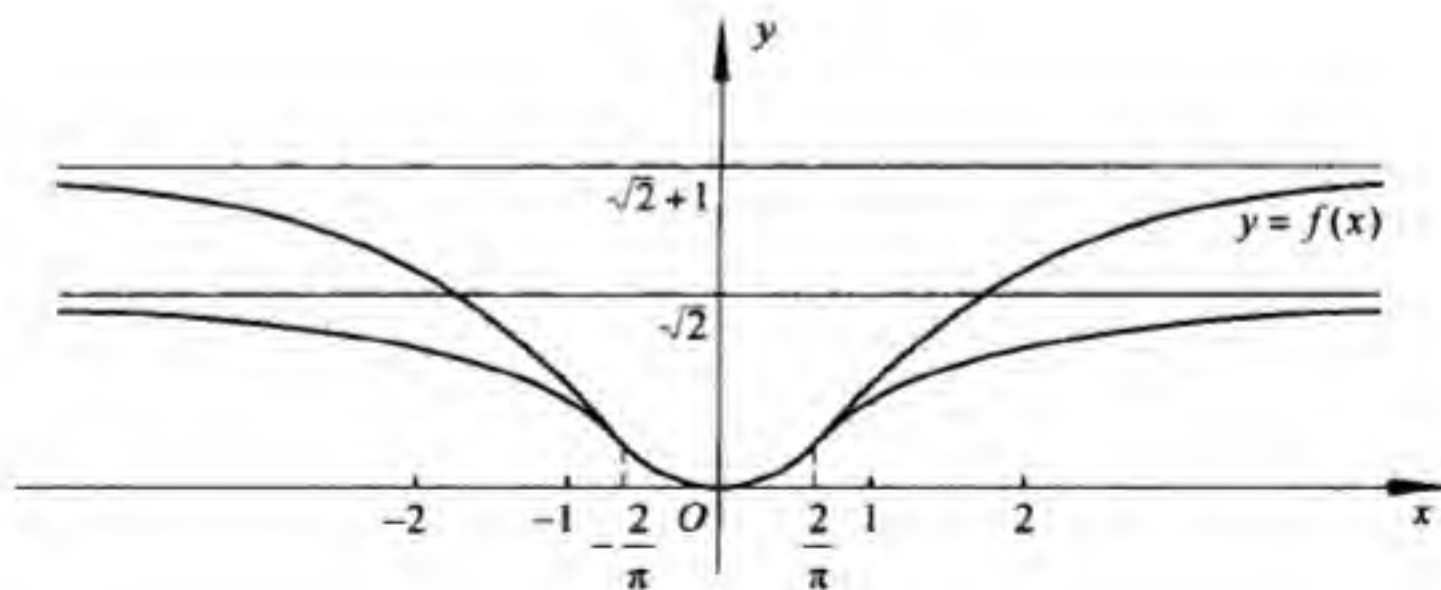


图 2.54

【1428】 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的极值, 并作出此函数的图像.

解 由于当 $x \neq 0$ 时, 恒有 $f(x) > f(0)$, 故当 $x=0$ 时函数有极小值 $f(0)=0$, 其图像如图 2.55 所示,

它对称于 Oy 轴, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$.

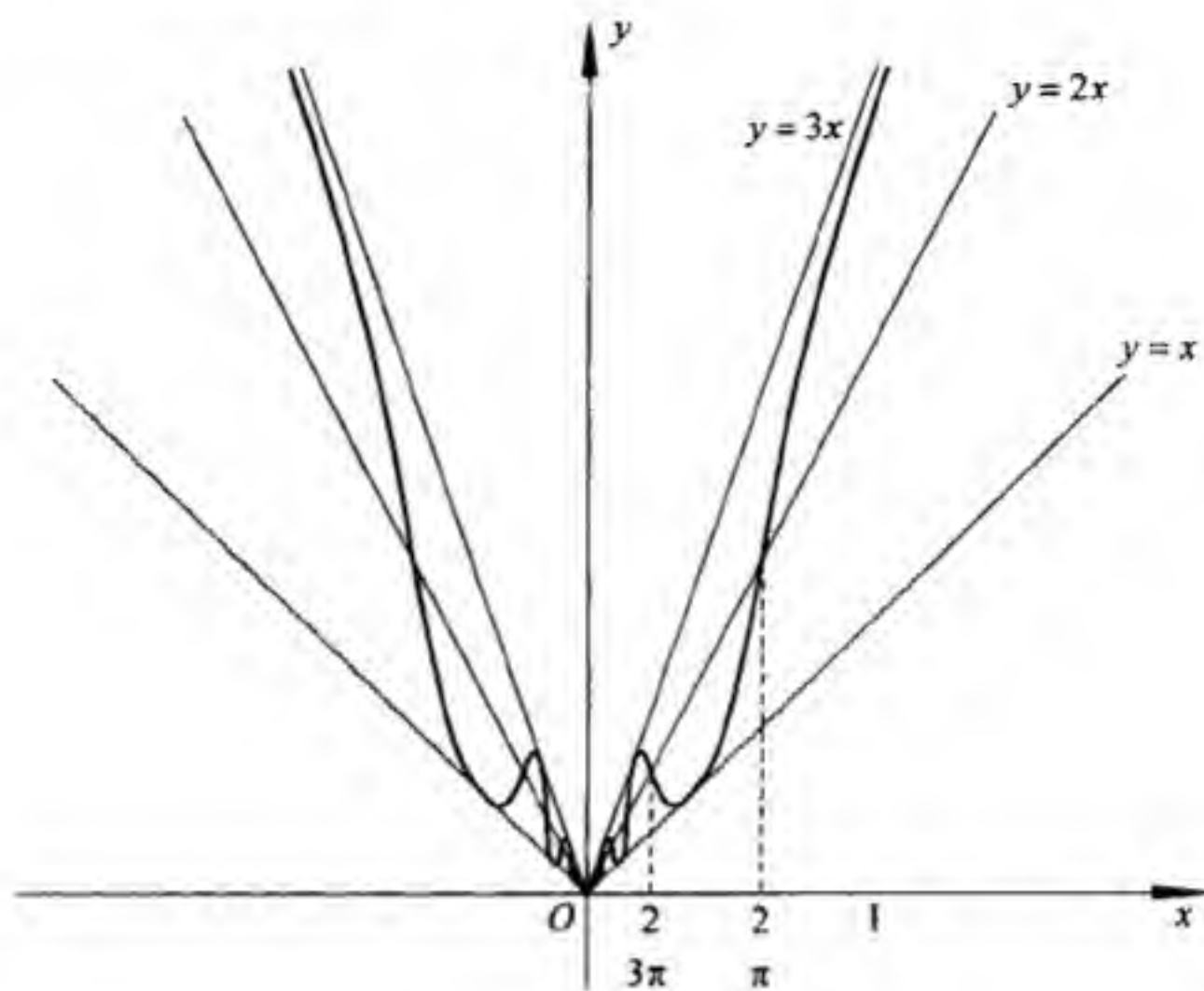


图 2.55

求下列函数的极值:

【1429】 $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 3 .

因为 $y'' = 6x - 12$, $y''(1) = -6 < 0$, $y''(3) = 6 > 0$,

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$; 当 $x = 3$ 时有极小值 $y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 - 4 = -4$.

【1430】 $y = 2x^2 - x^4$.

解 $y' = 4x - 4x^3$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$ 或 0 .

因为 $y'' = 4 - 12x^2$, $y''(-1) = -8 < 0$, $y''(0) = 4 > 0$, $y''(1) = -8 < 0$,

所以, 当 $x = -1$ 时有极大值 $y = 1$; 当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$; 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

【1431】 $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y' = (x-1)(x-2)^2(6x^2 - 10x + 2)$. 令 $y' = 0$ 得 $x = 1, 2$ 或 $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

因为当 $x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ 时, $y' < 0$, 当 $\frac{5 - \sqrt{13}}{6} < x < 1$ 时, $y' > 0$, 当 $1 < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ 时, $y' < 0$,

当 $\frac{5 + \sqrt{13}}{6} < x < 2$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 2$ 时, $y' < 0$,

所以,

当 $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \approx 0.23$ 时有极小值 $y \approx -0.76$; 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 0$;

当 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \approx 1.43$ 时有极小值 $y \approx -0.05$; 当 $x = 2$ 时无极值.

【1432】 $y = x + \frac{1}{x}$.

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$.

因为当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$; 当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

【1433】 $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$.

因为当 $x < -1$ 时, $y' < 0$, 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,
所以, 当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$; 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$

【1434】 $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

解 $y' = \frac{5x-7}{(x+1)^3}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{7}{5}$.

因为当 $-1 < x < \frac{7}{5}$ 时, $y' < 0$, 当 $x > \frac{7}{5}$ 时, $y' > 0$, 所以, 当 $x = \frac{7}{5}$ 时有极小值 $y = -\frac{1}{24}$.

【1435】 $y = \sqrt{2x-x^2}$.

解 $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$.

因为当 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 当 $1 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.
其次, 由于函数 y 的值不为负数, 故当 $x = 0$ 及 $x = 2$ 时, 有边界的极小值 $y = 0$.

【1436】 $y = x \sqrt[3]{x-1}$.

解 $y' = \frac{4x-3}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{3}{4}$.

因为当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $y' < 0$, 当 $x > \frac{3}{4}$ 时, $y' > 0$, 所以, 当 $x = \frac{3}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2} \approx -0.47$.

此外, 对于 $y' \rightarrow \infty$ 的点也可能有极值, 但在此题中, 当 x 经过 1 时, 导数不变号, 故当 $x = 1$ 时无极值.

【1437】 $y = xe^{-x}$

解 $y' = e^{-x}(1-x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$.

因为当 $x < 1$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = e^{-1} \approx 0.368$.

【1438】 $y = \sqrt{x} \ln x$.

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = e^{-2}$.

因为当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $y' < 0$, 当 $x > e^{-2}$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = e^{-2} \approx 0.135$ 时有极小值 $y = -\frac{2}{e} \approx -0.736$.

又因当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$, 而 $y = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln x = 0$, 所以, 当 $x = +0$ 时有边界的极大值 $y = 0$.

【1439】 $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 e^2 .

因为当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 当 $1 < x < e^2$ 时, $y' > 0$, 当 $e^2 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$; 当 $x = e^2 \approx 7.389$ 时有极大值 $y = \frac{4}{e^2} \approx 0.541$.

【1440】 $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

解 $y' = -\sin x(1 + 2\cos x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = k\pi$ 或 $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

因为 $y'' = -\cos x - 2\cos 2x$, $y''|_{x=k\pi} = (-1)^{k+1} - 2 < 0$, $y''|_{x=\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi} = \frac{1}{2} + 1 > 0$.

所以, 当 $x = k\pi$ 时有极大值 $y = (-1)^k + \frac{1}{2}$; 当 $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{4}$.

【1441】 $y = \frac{10}{1 + \sin^2 x}$.

解 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时, $\sin x = 0$, 所以, 此时有极大值 $y = 10$;

当 $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$) 时, $|\sin x| = 1$, 所以, 此时有极小值 $y = 5$.

【1442】 $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.

解 $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为当 $x < 1$ 时, $y' > 0$, 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$;

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.439$.

【1443】 $y = e^x \sin x$.

解 $y' = e^x (\sin x + \cos x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 或 $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \dots$).

因为 $y'' = 2e^x \cos x$, $y''|_{x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi} > 0$, $y''|_{x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi} < 0$,

所以, 当 $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$; 当 $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极大值 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$.

【1444】 $y = |x| e^{-|x-1|}$.

解 当 $x < 0$ 时, $y = -xe^{x-1}$, $y' = -(x+1)e^{x-1}$. 令 $y' = 0$ 得 $x = -1$.

因为当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$, 所以, 当 $x = -1$ 时有极大值 $y = e^{-2} \approx 0.135$.

又当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$y = xe^{x-1}, \quad y' = (x+1)e^{x-1} > 0,$$

所以, 当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$.

而当 $x > 1$ 时, 有

$$y = xe^{1-x}, \quad y' = (1-x)e^{1-x} < 0.$$

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

求下列函数在所给闭区间上的最大值和最小值:

【1445】 $f(x) = 2^x$, 在闭区间 $[-1, 5]$ 上.

解 由于 $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$, 故 $f(x) = 2^x$ 在 $[-1, 5]$ 上递增. 于是, 它的最小值和最大值分别为

$$m = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{及} \quad M = 2^5 = 32.$$

【1446】 $f(x) = x^2 - 4x + 6$, 在闭区间 $[-3, 10]$ 上.

解 $f'(x) = 2x - 4$, $f''(x) = 2$. 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 2$.

由于 $f''(2) = 2 > 0$, 所以, 当 $x = 2$ 时有极小值 $f(2) = 2$. 因为这是唯一的极小值, 因此也就是最小值, 即 $m = 2$.

又由于 $f''(x) > 0$, 曲线呈凹状, 所以在端点取得最大值, 从而, $M = \max\{f(-3), f(10)\} = 66$.

【1447】 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 在闭区间 $[-10, 10]$ 上.

解 由于 $f(x) \geq 0$, 故对于在区间 $[-10, 10]$ 上能使 $f(x) = 0$ 的点取得最小值. 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1, 2$. 即当 $x = 1, 2$ 时, 函数取得最小值 $m = 0$.

其次, $f'(x) = (2x - 3) \operatorname{sgn}(x^2 - 2x + 3)$, 当 $1 < x < \frac{3}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $\frac{3}{2} < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$,

所以, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4}$, 于是, $M = \max\{f(\frac{3}{2}), f(-10), f(10)\} = 132$.

【1448】 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在闭区间 $[0.01, 100]$ 上.

提示 利用 1432 题的结果.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x=1$ 时有极小值 $f(1)=2$.

由于在此闭区间 $[0.01, 100]$ 上 $f(1)$ 为唯一的极小值, 因此也就是最小值, 即 $m=2$.

其次, 最大值 $M=\max\{f(0.01), f(100)\}=100.01$.

【1449】 $f(x)=\sqrt{5-4x}$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上.

解 $f'(x)=-\frac{2}{\sqrt{5-4x}}<0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上递减, 所以, 最小值和最大值分别为 $m=f(1)=1$, $M=f(-1)=3$.

求下列函数在所给区间上的下确界(inf)与上确界(sup):

【1450】 $f(x)=xe^{-0.01x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)>0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$. 于是, $\inf\{f(x)\}=0$.

其次, 求极值判断得知, 当 $x=100$ 时, 函数 $f(x)$ 取极大值, 并且是唯一的极值, 即为最大值. 于是,

$$\sup\{f(x)\}=f(100)=\frac{100}{e} \approx 36.8.$$

【1451】 $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解题思路 利用 1420 题的结果可知, 在 $(0, +\infty)$ 内 $f(x)$ 递减, 并注意 $f(0)=1$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$.

解 由 1420 题知, $f'(x)<0$, 即 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内递减, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$, $f(0)=1$. 于是,

$$\inf\{f(x)\}=0, \quad \sup\{f(x)\}=1.$$

【1452】 $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 $f(x)>0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=0$. 于是, $\inf\{f(x)\}=0$.

容易验证, 当 $x=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值, 并且只有一个极值, 因而就是最大值. 于是,

$$\sup\{f(x)\}=f(\sqrt{\sqrt{2}-1})=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \approx 1.2.$$

【1453】 $f(x)=e^{-x^2} \cos x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 可以求得, 函数的最小值和最大值分别为

$$m=f\left(\pm\sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067, \quad M=f(0)=1.$$

于是,

$$\inf\{f(x)\}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067, \quad \sup\{f(x)\}=1.$$

【1454】 求函数 $f(\xi)=\frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x<\xi<+\infty$ 内的下确界与上确界, 作出下列函数的图像:

$$m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi), \quad M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

解 由于 $f(-3)$, $f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值, 又 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi)=0$, 于是,

当 $-\infty< x \leq -3$ 时, $m(x)=f(-3)=\frac{1}{6}$, 当 $-3< x \leq -1$ 时, $m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$,

当 $-1< x < +\infty$ 时, $m(x)=0$; 当 $-\infty< x \leq 1$ 时, $M(x)=f(1)=\frac{1}{2}$,

当 $1< x < +\infty$ 时, $M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$.

函数 $m(x)$ 及 $M(x)$ 的图像分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

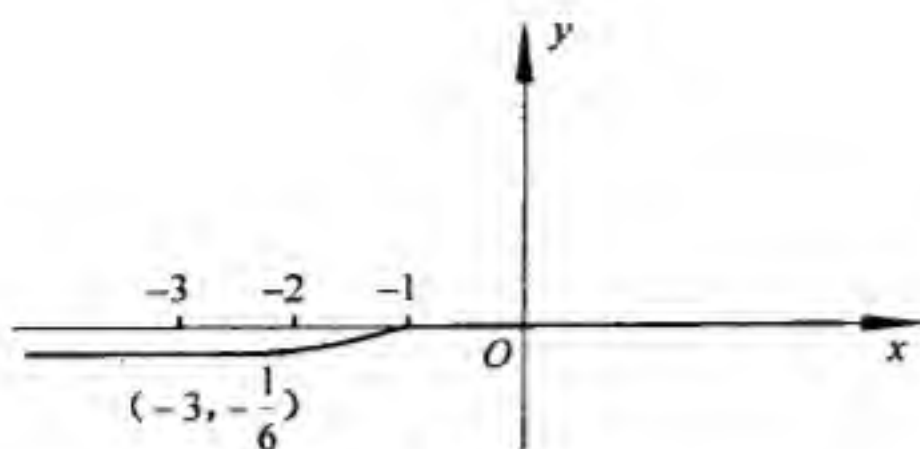


图 2.56

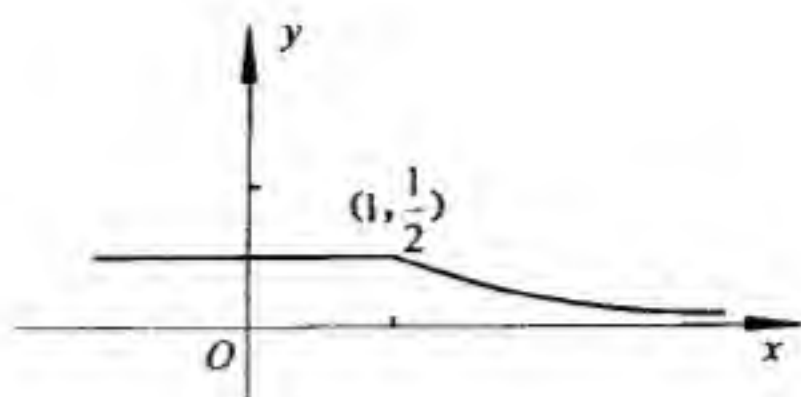


图 2.57

【1455】 求以下各数列的最大项:

(1) $\frac{n^{10}}{2^n}$ ($n=1, 2, \dots$); (2) $\frac{\sqrt{n}}{n+10000}$ ($n=1, 2, \dots$); (3) $\sqrt[n]{n}$ ($n=1, 2, \dots$).

解题思路 (1) 经判断知, 当 $x = \frac{10}{\ln 2}$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$ 有唯一的极大值. (2) 经判断知, 当 $x = 10000$ 时, 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+10000}$ 有唯一的极大值. (3) 经判断知, 当 $x = e$ 时, 函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) 有唯一的极大值.

解 (1) 经判断知, 当 $x = \frac{10}{\ln 2}$ 时, $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值, 并且是唯一的极值. 从而, 最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}}, \frac{N^{10}}{2^N}, \frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N = \left[\frac{10}{\ln 2}\right] = 14$. 于是, 最大项为

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}}, \frac{14^{10}}{2^{14}}, \frac{15^{10}}{2^{15}}\right) = \frac{14^{10}}{2^{14}} \approx 1.77 \times 10^7.$$

(2) 经判断知, 当 $x = 10000$ 时 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+10000}$ 有极大值, 并且是唯一的极值. 于是, 最大项为

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right) = f(10000) = \frac{1}{200}.$$

(3) 经判断知, 当 $x = e$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) 有极大值, 并且是唯一的极值. 于是, 最大项为

$$\max(\sqrt[n]{n}) = \max(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}) = \sqrt[3]{3} \approx 1.44.$$

【1456】 证明下列不等式:

(1) 当 $|x| \leq 2$ 时, $|3x - x^3| \leq 2$;

(2) 若 $0 \leq x \leq 1$ 及 $p > 1$, 则 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$;

(3) 当 $m > 0$, $n > 0$ 及 $0 \leq x \leq a$ 时, $x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$;

(4) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a$ ($x > 0$, $a > 0$, $n > 1$);

(5) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

证 (1) 设 $f(x) = 3x - x^3$, 经判断知, 在 $|x| \leq 2$ 上, 其最小值和最大值分别为 $m = f(-1) = -2$, $M = f(1) = 2$. 而边界函数值为 $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$. 于是, $|3x - x^3| \leq 2$.

(2) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 经判断知, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ 为 $0 \leq x \leq 1$ 上的唯一的极小值, 而边界值 $f(0) = f(1) = 1$, 所以, $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$.

(3) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$, 经判断知, $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 为 $0 \leq x \leq a$ 上的唯一的极大值, 所以,

$$x^n(a-x)^n \leq \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}.$$

(4) 设 $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$, 经判断知, $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为满足 $x > 0$ 的唯一的极小值, 而边界值 $f(+0) =$

$f(+\infty) = 1$, 所以,

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a} \leq 1.$$

由于 $x+a > 0$, 于是, $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a$.

(5) $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$, 其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 所以, 恒有

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

【1457】求多项式 $P(x) = x(x-1)^2(x+2)$ 在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的偏差”, 就是求

$$E_P = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

解 $P'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x - 1)$.

令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$, 所以,

$$\begin{aligned} E_P &= \max \left\{ |P(-2)|, |P(1)|, \left| P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \right|, \left| P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \right| \right\} \\ &= \left| P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \frac{9+6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85. \end{aligned}$$

【1458】应当选择怎样的系数 q , 使多项式 $P(x) = x^2 + q$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的偏差最小, 即

$$E_P = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min?$$

解 $P'(x) = 2x$, 令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 0$, 所以,

$$E_P = \max \{ |P(0)|, |P(1)|, |P(-1)| \} = \max \{ |q|, |1+q| \}.$$

当 $|q| = |1+q|$ 时, E_P 最小. 解之, 得 $q = -\frac{1}{2}$.

【1459】数 $\Delta = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$ 称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的绝对偏差.

求函数 $f(x) = x^2$ 与 $g(x) = x^3$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的绝对偏差.

解 由于 $f(x) - g(x) = x^2 - x^3$, $f'(x) - g'(x) = 2x - 3x^2$, 从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $\frac{2}{3}$.

又因 $f''(x) - g''(x) = 2 - 6x$, $f''\left(\frac{2}{3}\right) - g''\left(\frac{2}{3}\right) = 2 - 4 = -2 < 0$,

所以, 当 $x = \frac{2}{3}$ 时 $f(x) - g(x)$ 取极大值; 又由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) - g(x) \geq 0$, 所以, 绝对偏差

$$\Delta = f\left(\frac{2}{3}\right) - g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}.$$

【1460】在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数 $g(x) = (x_1 + x_2)x + b$ 近似地代替函数 $f(x) = x^2$, 使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的绝对偏差(参阅上题)最小, 并求此最小的绝对偏差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - [(x_1 + x_2)x + b], \quad f'(x) - g'(x) = 2x - (x_1 + x_2),$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 > 0,$$

故当 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 时, $f(x) - g(x)$ 取极小值. 于是,

$$\begin{aligned}\Delta &= \max \left\{ \left| f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \right|, |f(x_1) - g(x_1)|, |f(x_2) - g(x_2)| \right\} \\ &= \max \left\{ \left| b + \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \right|, |b + x_1 x_2| \right\}.\end{aligned}$$

要 Δ 为最小, 需

$$\left| b + \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \right| = |b + x_1 x_2|.$$

解之, 得

$$b = -\frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2).$$

此时

$$g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2),$$

而最小的绝对偏差 $\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2$.

【1461】 求函数 $f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$ 的极小值.

解题思路 先作函数 $y=2|x|$ 及 $y=|1+x|$ 的图像, 并求得交点, 由此即知

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leq x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ -2x, & -\infty < x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

解 $y=2|x|$ 及 $y=|1+x|$ 的图像如图 2.58 所示, 它们的交点是 $A(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 及 $B(1, 2)$. 从而,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leq x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ -2x, & -\infty < x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

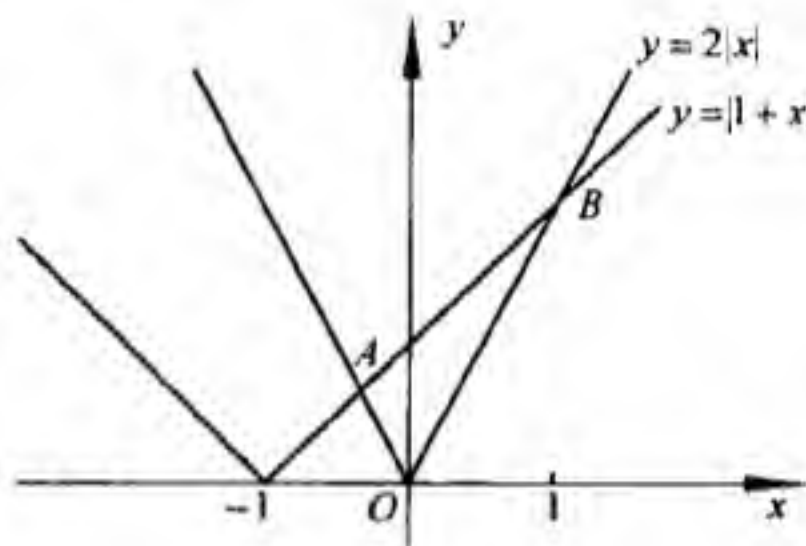


图 2.58

于是, 函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目, 并划分出这些根所在的区间:

【1462】 $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

提示 利用函数的单调性.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$, 则 $f(x)$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 且有

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

令 $f'(x) = 0$, 得临界点* (也即驻点) $x=1$ 或 3 .

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(x) > 0, \quad f(1) = -6 < 0,$$

故在区间 $(-\infty, 1)$ 内方程无实根.

当 $x \in (1, 3)$ 时, 由于

$$f'(x) < 0, \quad f(3) = -10 < 0,$$

* $f'(x) = 0$ 的临界点也称为驻点.

故在 $(1, 3)$ 内也无实根.

当 $x \in (3, +\infty)$, 由于

$$f'(x) > 0, \quad f(3) = -10 < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故在 $(3, +\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

【1463】 $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0.$

解题思路 令 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + h$, 注意到在临界点 $x = -1$ 及 3 处, 有 $f(-1) = 5 + h$, $f(3) = -27 + h$ 及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. 分别就 $h < -5$, $-5 < h < 27$ 及 $h > 27$ 加以讨论.

解 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + h$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. 令 $f'(x) = 0$, 得临界点 $x = -1$ 或 3 .

由于

$$f(-1) = 5 + h, \quad f(3) = -27 + h, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故当 $h < -5$ 时, $f(-1) < 0$, $f(3) < 0$, 且

$$f'(x) > 0, \quad x \in (-\infty, -1), \quad f'(x) < 0, \quad x \in (-1, 3), \quad f'(x) > 0, \quad x \in (3, +\infty),$$

因此, 有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < h < 27$ 时, $f(-1) > 0$, $f(3) < 0$. 导数 $f'(x)$ 的符号变化同上, 于是, 有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $h > 27$ 时, $f(3) > 0$, $f(-1) > 0$, 因此, 有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

【1464】 $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$, 则 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12$. 令 $f'(x) = 0$, 得临界点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad f(-1) = -31 < 0, \quad f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, \quad x \in (-\infty, -1), \quad f'(x) > 0, \quad x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根, 分别位于 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内.

【1465】 $x^5 - 5x = a.$

解题思路 仿 1463 题的解法.

解 设 $f(x) = x^5 - 5x - a$, 则 $f'(x) = 5x^4 - 5$. 令 $f'(x) = 0$, 得临界点 $x = \pm 1$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \\ f'(x) &> 0, \quad x \in (-\infty, -1), \quad x \in (1, +\infty), \\ f'(x) &< 0, \quad x \in (-1, 1), \\ f(-1) &= 4 - a, \quad f(1) = -4 - a, \end{aligned}$$

故 当 $a < -4$ 时, $f(-1) > 0$, $f(1) > 0$. 因此, 有且仅有一实根, 位于 $(-\infty, -1)$ 内;

当 $-4 < a < 4$ 时, $f(-1) > 0$, $f(1) < 0$, 此时有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内;

当 $a > 4$ 时, $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$. 因此, 有且仅有一实根位于 $(1, +\infty)$ 内.

【1466】 $\ln x = kx.$

解题思路 当 $k = 0$ 时, 显然方程仅有一根 $x = 1$. 故不妨设 $k \neq 0$. 令 $f(x) = \ln x - kx$, 求得临界点 $x = \frac{1}{k}$

后, 分别就 $-\infty < k < 0$, $0 < k < \frac{1}{e}$ 及 $k > \frac{1}{e}$ 加以讨论.

解 当 $k = 0$ 时, 方程显然仅有一个根 $x = 1$. 因此, 不妨设 $k \neq 0$. 令 $f(x) = \ln x - kx (x > 0)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k.$$

令 $f'(x) = 0$, 得临界点 $x = \frac{1}{k}$. 由于 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 故曲线的图像始终呈凸状.

当 $x \in (0, \frac{1}{k})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$. 又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - 1,$$

故当 $k > \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) < 0$, 此时方程无根.

当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) > 0$, 因此, 方程有两个实根, 分别位于 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 内.

当 $-\infty < k < 0$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$, $f(1) = -k > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0$, 故此时方程有且仅有一实根位于 $(0, 1)$ 内.

【1467】 $e^x = ax^2 \quad (a > 0).$

解 对于函数 $f(x) = e^x - ax^2$, 有 $f(0) = 1 > 0$; 又因 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 故总存在充分大的正数 x_0 , 使 $f(-x_0) < 0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0, 0)$ 中, 从而在 $(-\infty, 0)$ 中至少有 $f(x) = 0$ 的一个实根. 而当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) = e^x - 2ax > 0$, 即函数递增. 因此, $f(x) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时只有唯一的根.

对于 $x > 0$ 的情况, 为求方程 $e^x = ax^2$ 的根, 只要求方程 $x = \ln a + 2 \ln x \quad (a > 0, x > 0)$ 的根. 设

$$g(x) = x - \ln a - 2 \ln x, \quad \text{则有} \quad g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 2$.

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$, 所以, $g(2) = \ln \frac{e^2}{4a}$ 为极小值.

又因 $\lim_{x \rightarrow -0} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 因此,

当 $g(2) > 0$, 即 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 无根.

当 $g(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有唯一的根.

当 $g(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有二个根, 它们分别位于 $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

综上所述, 方程 $e^x = ax^2$ 根的情况如下:

当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时有唯一的根, 位于 $(-\infty, 0)$ 内; 当 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, 有两个根, 一根为 2, 一根位于 $(-\infty, 0)$ 内;

当 $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ 时有三个根, 分别位于 $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

【1468】 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\sin^3 x \cos x = a$.

解 当 $a = 0$ 时, 方程显然有实根 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 或 π . 因此, 不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x) = \sin^3 x \cos x - a$, 则

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x.$$

令 $f'(x) = 0$, 得临界点 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, \quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a, \quad f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

于是, 当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程有两个实根位于 $(0, \pi)$ 内; 当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程无实根.

【1469】 $\operatorname{ch} x = kx$.

解 设 $f(x) = \operatorname{ch} x - kx$, 则 $f'(x) = \operatorname{sh} x - k$. 令 $f'(x) = 0$, 得唯一临界点 x_0 , 它适合 $k = \operatorname{sh} x_0$.

由于 $f''(x) = \operatorname{ch} x > 0$, 故曲线图像呈凹状, 且在 $x = x_0$ 达最小值. 显然 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 因此, 我们只要考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - kx_0 = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0.$$

先设 $k > 0$, 于是 $x_0 > 0$. 引进辅助函数

$$g(x) = \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh} x,$$

方程 $g(x) = 0$, 即 $\operatorname{coth} x = x$ 的(唯一)正根 $\xi \approx 1.2^{*3}$. 由于

$$g'(x) = \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x = -x \operatorname{ch} x,$$

因此假如 $x > 0$, 则 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递减.

若 $k > \operatorname{sh} \xi$, 即 $\operatorname{sh} x_0 > \operatorname{sh} \xi$, 由于 $\operatorname{sh} x$ 是递增的, 故必 $x_0 > \xi$, 从而有

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 < \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0.$$

因此, 方程 $f(x) = 0$ 恰有两个实根. 由于

$$f(\xi) = \operatorname{ch} \xi - k\xi < \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0, \quad f(0) = 1,$$

故两根分别位于 $(0, \xi)$ 及 $(\xi, +\infty)$ 内.

若 $k = \operatorname{sh} \xi$, 则 $\operatorname{sh} x_0 = \operatorname{sh} \xi$, 从而, $x_0 = \xi$. 因此, $f(x_0) = 0$, 此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0 .

若 $0 < k < \operatorname{sh} \xi$, 则 $\operatorname{sh} x_0 < \operatorname{sh} \xi$, 从而 $x_0 < \xi$. 因此,

$$f(x_0) = \operatorname{ch} x_0 - x_0 \operatorname{sh} x_0 > \operatorname{ch} \xi - \xi \operatorname{sh} \xi = 0,$$

故方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k = 0$, 显然方程 $f(x) = 0$ 无根.

若 $k < 0$, 则可令 $x = -t$. 于是, 得 $\operatorname{ch} t = -kt$ ($-k > 0$).

通过按上述的方法讨论该方程的根, 易知当 $\operatorname{sh} \xi < -k$ 时, 原方程有两实根, 分别位于 $(-\xi, 0)$ 及 $(-\infty, -\xi)$ 内, 其中 ξ 满足 $\operatorname{coth} \xi = \xi$ (≈ 1.2). 而当 $-\operatorname{sh} \xi < k < 0$ 时, 方程无实根.

综上所述, 若 $|k| > \operatorname{sh} \xi \approx 1.50$, 方程有两实根 x_1 及 x_2 , 满足 $0 < |x_1| < \xi$, $\xi < |x_2| < +\infty$; 若 $|k| = \operatorname{sh} \xi$, 方程只有一个实根 ($k = \operatorname{sh} \xi$ 时, 根为 ξ , $k = -\operatorname{sh} \xi$ 时, 根为 $-\xi$); 若 $|k| < \operatorname{sh} \xi$, 则方程无实根.

*) 方程根的近似解法见本章 § 15.

【1470】 在什么条件下方程 $x^3 + px + q = 0$ 有: (1) 一个实根; (2) 三个实根.

在平面 (p, q) 上画出相应的区域.

解 设 $f(x) = x^3 + px + q$, 则 $f'(x) = 3x^2 + p$. 若 $p \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$ ($x \neq 0$), 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是递增的, 并且显然 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 故 $f(x) = 0$ 有唯一实根.

若 $p < 0$, 令 $f'(x) = 0$ 解得 $x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$. 在 $(-\infty, x_2]$ 和 $[x_1, +\infty)$ 上 $f(x)$ 递增, 在 $[x_2, x_1]$ 上 $f(x)$ 递减.

因此, 若 $f(x_1)f(x_2) > 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 仅有一个实根. 若 $f(x_2) > 0$, $f(x_1) < 0$, 则方程 $f(x) = 0$ 恰有三个实根.

$$\text{由于} \quad f(x_1) = -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

$$f(x_2) = \frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q,$$

故 $f(x_1)f(x_2) > 0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p \geq 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1) < 0$ 及 $f(x_2) > 0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

此即方程有三实根的条件.

如图 2.59 所示, 曲线 $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ 的左右上方是方程仅有一实根的 (p, q) 域, 以阴影表之; 而曲线的下方则是方程有三实根的 (p, q) 域, 以不具阴影表之.

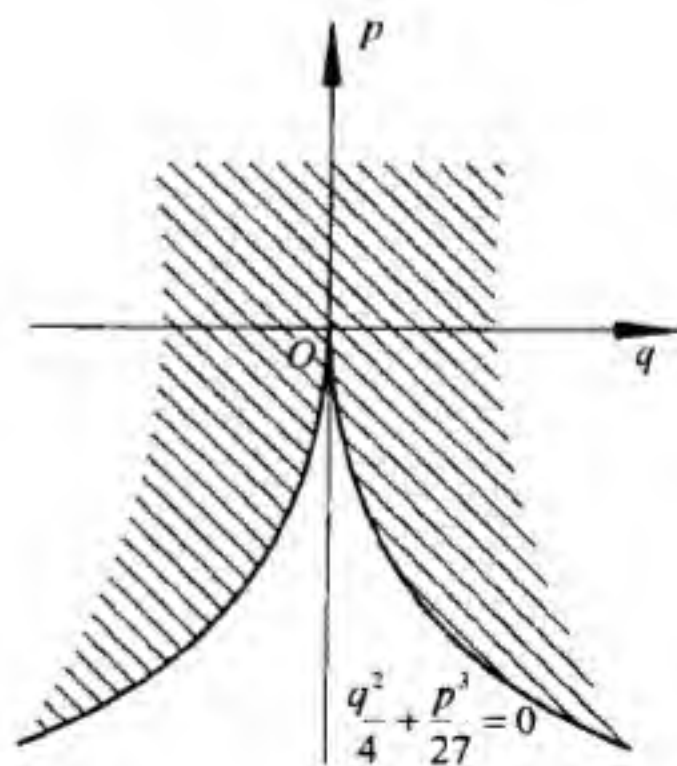


图 2.59

§ 12. 依据函数的特征点作函数图像

为了作出函数 $y=f(x)$ 的图像, 必须: (1) 确定此函数的存在域; 并研究函数在其存在域边界点的性质; (2) 查明图像的对称性和周期性; (3) 求出函数的不连续点及连续的区间; (4) 确定函数的零点及同号区间; (5) 求出极值点并查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图像凹凸的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8) 指出函数图像的各种特性.

作出下列函数的图像:

【1471】 $y=3x-x^3$.

解 $y'=3-3x^2$, 令 $y'=0$ 得 $x=-1$ 或 1 . $y''=-6x$, 令 $y''=0$ 得 $x=0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow

当 $x=-1$ 时, $y=-2$; $x=0$, $\pm\sqrt{3}$ 时, $y=0$; $x=1$ 时, $y=2$.

图像对称于原点, 如图 2.60 所示.

【1472】 $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$.

解 以 $-x$ 替代 x , y 值不变, 故图像对称于 Oy 轴.

零点处: $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx\pm 1.65$.

$y'=2x-2x^3$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$, 或 ± 1 . $y''=2-6x^2$, 令 $y''=0$ 得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow

当 $x=0$ 时, $y=1$; $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $y=\frac{23}{18}$; $x=1$ 时, $y=\frac{3}{2}$. (图 2.61)

【1473】 $y=(x+1)(x-2)^2$.

解 $y'=3x(x-2)$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 2 ; $y''=6x-6$, 令 $y''=0$ 得 $x=1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
y	\nearrow	极大点	\searrow	拐点	\searrow	极小点	\nearrow

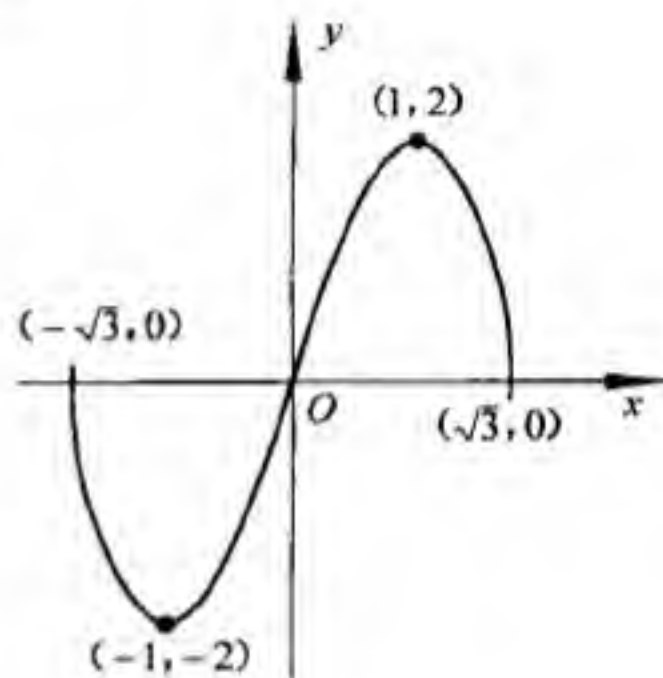


图 2.60

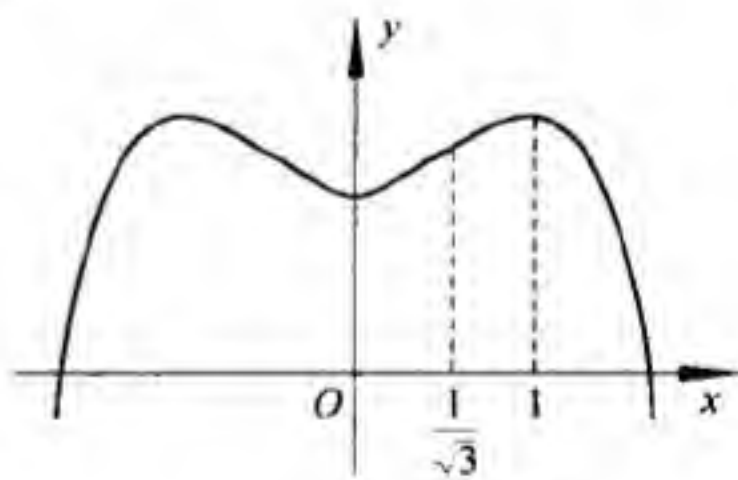


图 2.61

当 $x=0$ 时, $y=4$; $x=1$ 时, $y=2$; $x=2$ 时, $y=0$. (图 2.62)

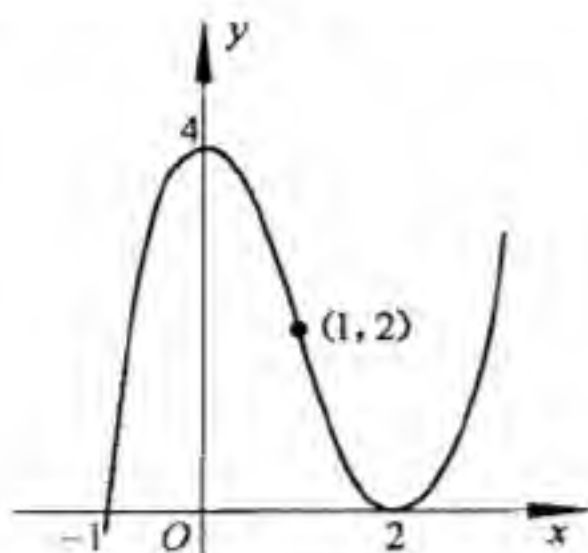


图 2.62

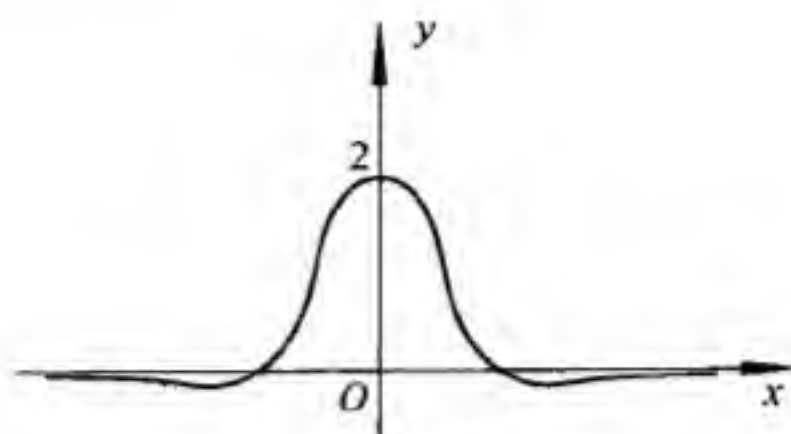


图 2.63

【1474】 $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$.

解题思路 图像关于 Oy 轴对称. 零点处: $x = \pm\sqrt{2}$.

当 $x=0$ 时有极大值 $y=2$; 当 $x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx \pm 2.06$ 时有极小值 $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.12$.

拐点处: $x = \pm 2.67$ 或 ± 0.77 . 渐近线: $y=0$.

解 显见图像对称于 Oy 轴.

零点处: $x = \pm\sqrt{2}$. $y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1+x^4)^2}$,

令 $y' = 0$ 得 $x=0$ 或 $\pm\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx \pm 2.06$.

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1+x^4)^3},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 或 ± 0.77 . 经判别知, 它们为拐点,

又因 $y''|_{x=0} = -2 < 0$, 故有极大值 $y=2$;

$y''|_{x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0$, 故有极小值 $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.12$.

渐近线为 $y=0$. 事实上, 它的斜率和截距分别为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^2}{x(1+x^4)} = 0,$$

它在 y 轴上的截距为

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^2}{1+x^4} = 0.$$

如图 2.63 所示.

【1475】 $y = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

解 零点处: $x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线: $x=2$, $x=3$ 和 $y=1$.

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2},$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42$, $x \approx 2.38$. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.586$. 经判别知, $y|_{x \approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值, $y|_{x \approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值; $x \approx -0.586$, $y \approx -0.07$ 为拐点. 由于

$$y = 1 - \frac{3}{x-2} + \frac{8}{x-3},$$

故可用图像相加法作出函数的图像(图 2.64).

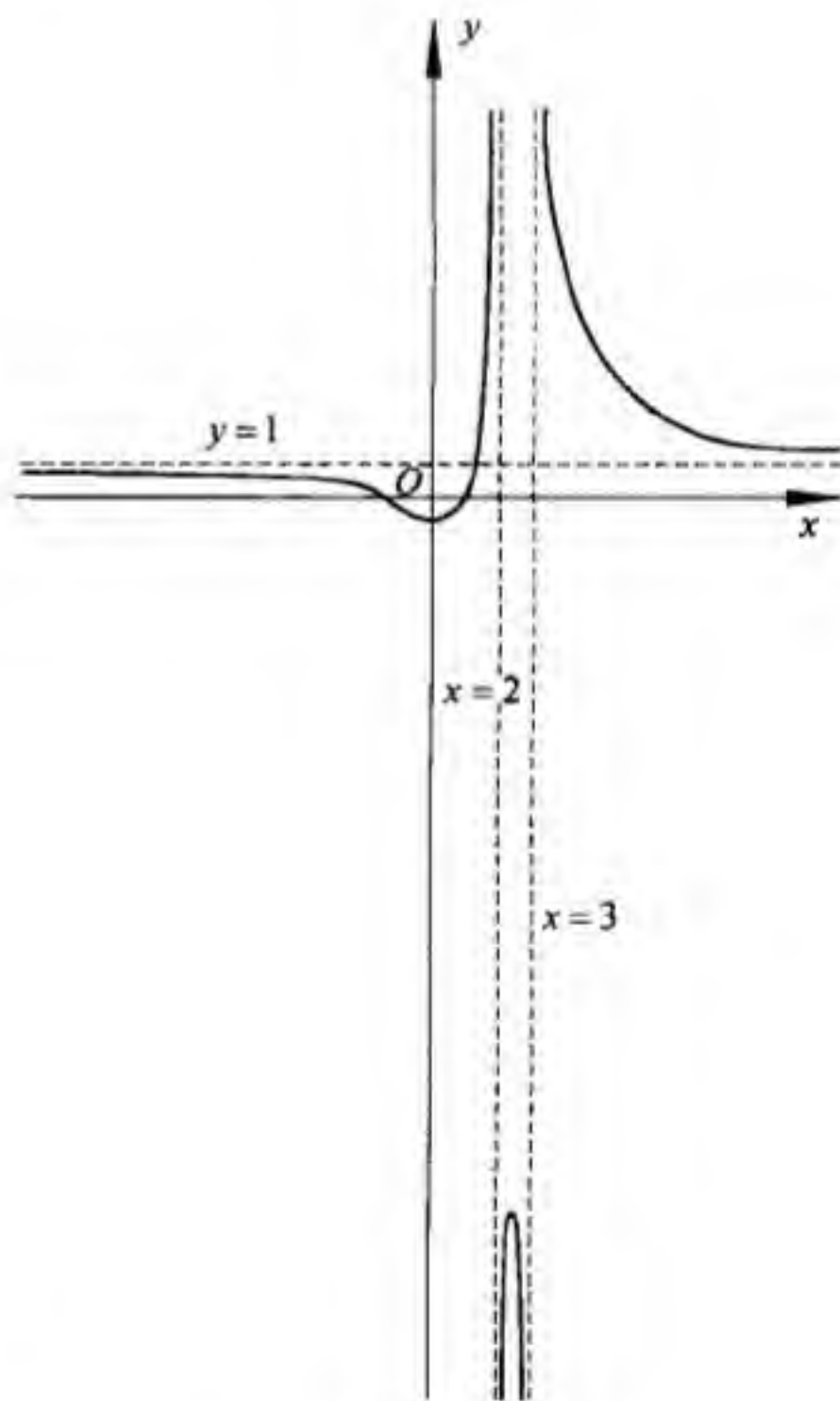


图 2.64

【1476】 $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解 零点处: $x=0$. 不连续点: $x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线: $y=0$, $x=-1$ 和 $x=1$.

$$y' = \frac{2x^2+x+1}{(1+x)^2(1-x)^3}, \quad y'' = \frac{2(3x^3+3x^2+5x+1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y'=0$ 无实根, 无极值点. 令 $y''=0$ 得 $x \approx -0.22$, 经判别知, 它为拐点, 此时 $y \approx -0.20$.

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升; 当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

(图 2.65)

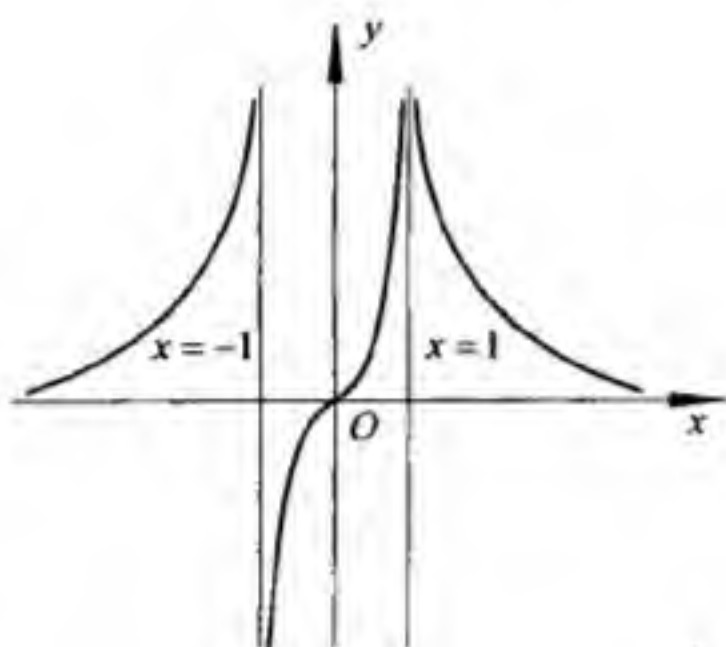


图 2.65

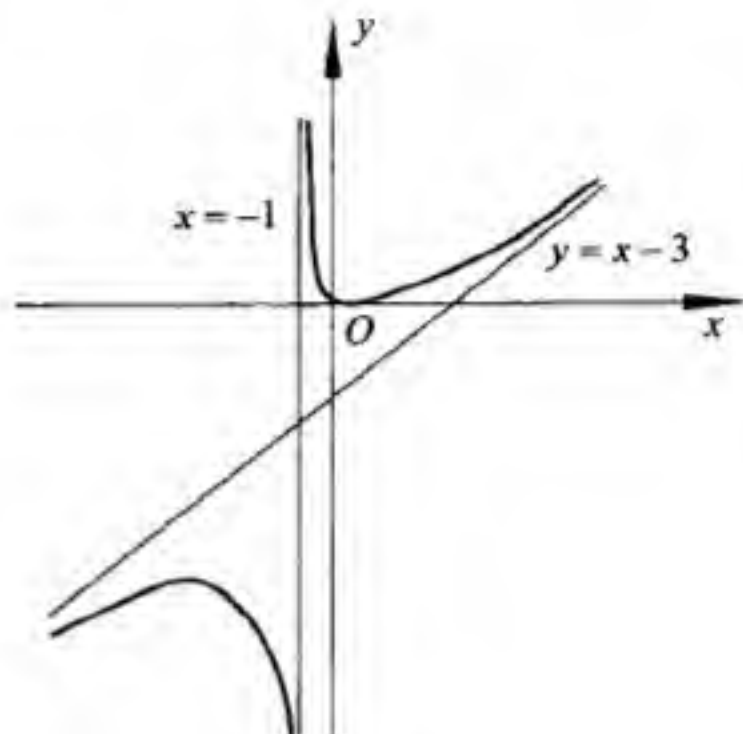


图 2.66

【1477】 $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

解 零点处: $x=0$. 不连续点: $x=-1$. 斜渐近线: $y=x-3$, 事实上, $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3$.

垂直渐近线: $x=-1$. $y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$. 令 $y'=0$, 得 $x=0$, 或 $x=-4$. $y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}$.

当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 图像呈凸状; 当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 图像呈凹状;

又 $y''|_{x=-4} < 0$, 故当 $x=-4$ 时有极大值 $y = -9 \frac{13}{27}$; 由于 y' 经过 $x=0$ 从负变到正, 故当 $x=0$ 时取得

极小值 $y=0$. (图 2.66)

【1478】 $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

解 零点处: $x=-1$. 垂直渐近线: $x=1$;

又 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 1$, 故还有水平渐近线为 $y=1$.

$$y' = \frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}, \quad \text{令 } y'=0 \text{ 得 } x=-1; \quad y'' = \frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}, \quad \text{令 } y''=0 \text{ 得 } x=-1 \text{ 或 } -4.$$

列表

x		-4		-1		1	
y'	-	-	-	0	+	∞	-
y''	-	0	+	0	+	∞	+
y	\searrow	拐点	\searrow	极小点	\nearrow	不连续点	\searrow

当 $x=-4$ 时, $y = \frac{81}{625}$; $x=-1$ 时, $y=0$; $x=0$ 时, $y=1$.

(图 2.67)

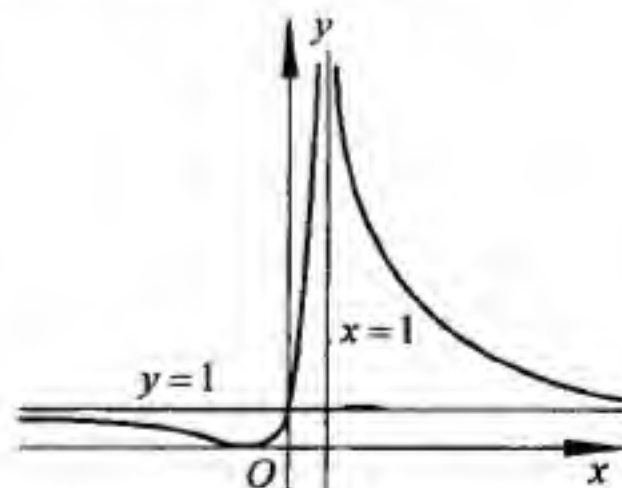


图 2.67

【1479】 $y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

解 零点处: $x=0$ 及 $x=1$.

垂直渐近线: $x=-1$; 斜渐近线: $y=x-3$.

事实上, $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3$.

$$y' = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x+1)^3}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x=0 \text{ 或 } \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$y'' = \frac{10x-2}{(x+1)^4}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{5}.$$

列表

x		$-\frac{\sqrt{17}+3}{2}$		-1		0		$\frac{1}{5}$		$\frac{\sqrt{17}-3}{2}$	
y'	+	0	-	∞	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	∞	-	-	-	0	+	+	+
y	\nearrow	极大点	\searrow	不连续点	\nearrow	极大点	\searrow	拐点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -\frac{\sqrt{17}+3}{2} \approx -3.56$ 时, 有极大值 $y = -\frac{34\sqrt{17}+142}{32} \approx -8.82$;

当 $x=0$ 时, 有极小值 $y=0$;

当 $x = \frac{\sqrt{17}-3}{2} \approx 0.56$ 时, 有极小值 $y = \frac{34\sqrt{17}-142}{32} \approx -0.06$;

当 $x = \frac{1}{5}$ 时, $y = -\frac{1}{45}$ (图 2.68).

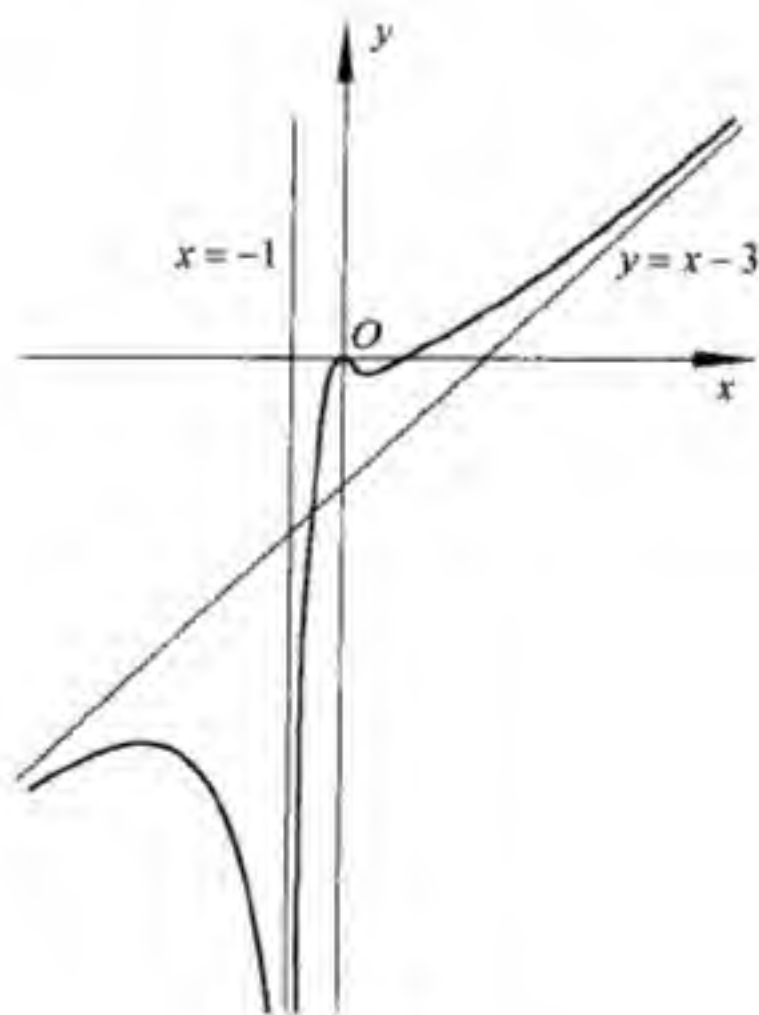


图 2.68

【1480】 $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解题思路 零点处: $x=0$. 渐近线: $x=-1, x=1$ 及 $y=0$. 图像关于原点对称. 无极值, 拐点处: $x=0$.

解 零点处: $x=0$. 不连续点: $x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线: $x=-1, x=1$ 及 $y=0$.

以 $-x$ 替代 x , y 的绝对值不变, 符号改变, 故图像关于原点对称.

$$y' = \frac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}, \text{ 令 } y'=0, \text{ 无实根.}$$

$$y'' = \frac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}, \text{ 令 } y''=0, \text{ 得 } x=0.$$

经判别知: 无极值, $x=0$ 为拐点(图 2.69).

列表

x		-1		0		1	
y'	-	∞	+	+	+	∞	-
y''	-	∞	-	0	+	∞	+
y	\searrow	不连续点	\nearrow	拐点	\nearrow	不连续点	\searrow

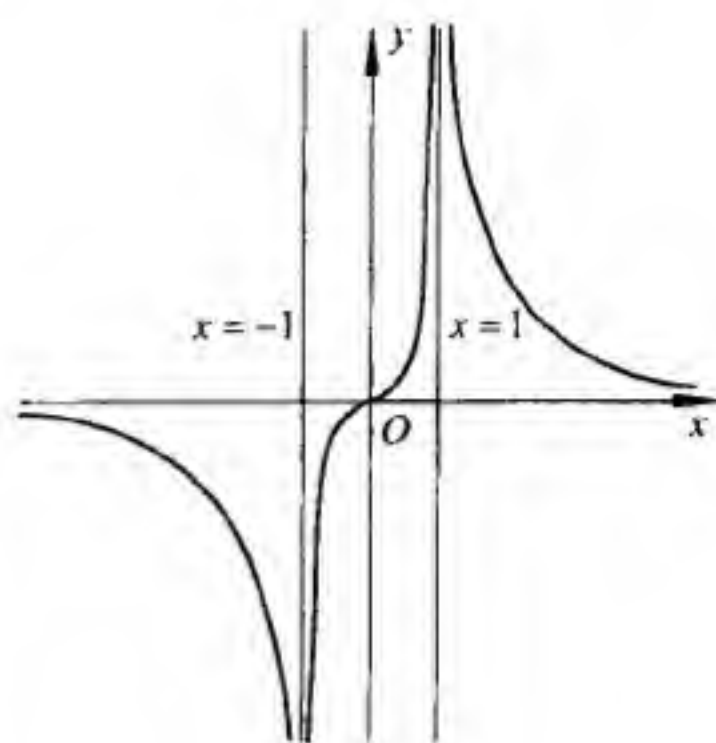


图 2.69

【1481】 $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}.$

解 零点处: $x=-1$. 不连续点: $x=1$. 垂直渐近线: $x=1$; 斜渐近线: $y=x+5$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 5.$$

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \text{ 令 } y'=0 \text{ 得 } x=-1 \text{ 或 } 5.$$

$$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \text{ 令 } y''=0 \text{ 得 } x=-1.$$

列表

x		-1		1		5	
y'	+	0	+	∞	-	0	+
y''	-	0	+	∞	+	+	+
y	\nearrow	拐点	\nearrow	不连续点	\searrow	极小点	\nearrow

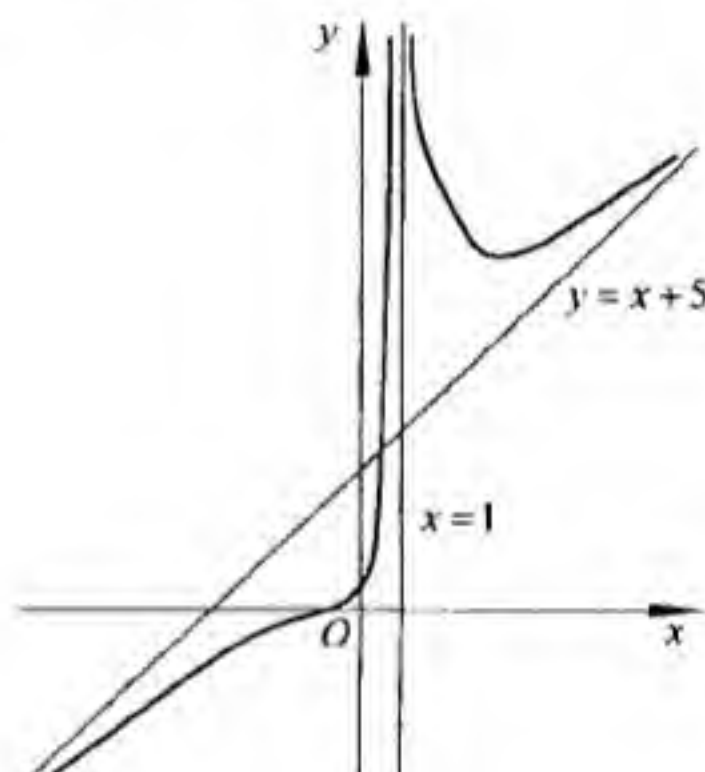


图 2.70

当 $x=-1$ 时, $y=0$; 当 $x=5$ 时, $y=13 \frac{1}{2}$ (图 2.70).

【1482】 $y = \frac{x^4+8}{x^3+1}.$

解 垂直渐近线: $x=-1$;

斜渐近线: $y=x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{x^5+4x^3-24x^2}{(x^3+1)^2},$$

$$y'' = \frac{-6x^5+96x^4+12x^2-48x}{(x^3+1)^3},$$

令 $y'=0$, 得 $x=0, 2$ 及 $x \approx -2.4$.

$y''|_{x=2} > 0$, 故当 $x=2$ 时有极小值 $y=2 \frac{2}{3}$;

$y''|_{x \approx -2.4} < 0$; 故当 $x \approx -2.4$ 时有极大值 $y \approx -3.2$.

经判别知: 当 $x=0, 0.752, 16.006$ 时有拐点. 渐近线 $y=x$ 与曲线交于点 $(8,8)$. 如图 2.71 所示.

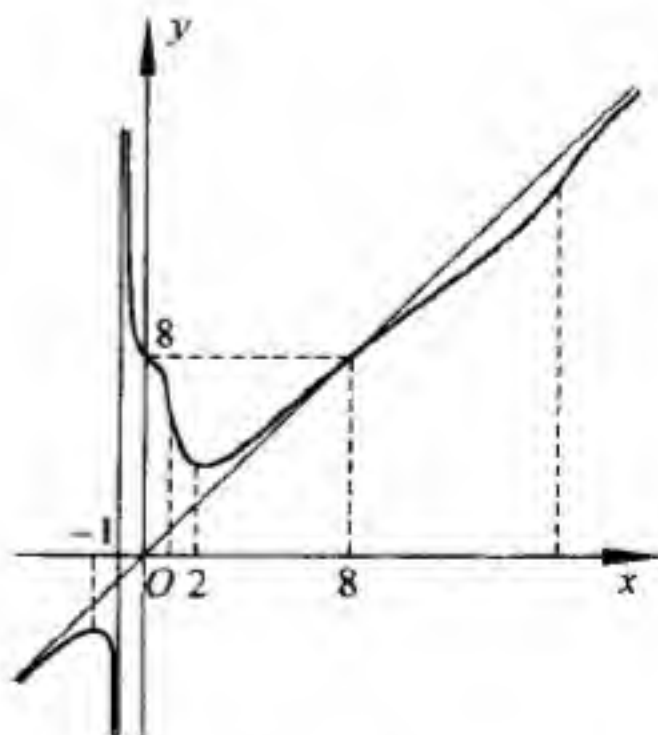


图 2.71

【1483】 $y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

零点处: $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79$.

$y' = \frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2}$, $y' = 0$ 无实根, 无极值点.

$y'' = \frac{4(24x^6 - 42x^4 + 45x^2 - 15)}{x^4(1-x^2)^3}$, 令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$.

经判别知, 此为拐点, 相应纵坐标 $y = -2\frac{2}{3}$.

渐近线: $x=0$, $x=-1$, $x=1$ 和 $y=0$.

当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 曲线上升.

当 $0 < x < 0.71$ 时, $y'' < 0$, 图像呈凸状.

当 $0.71 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 图像呈凹状.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 图像呈凸状.

图像如图 2.72 所示.

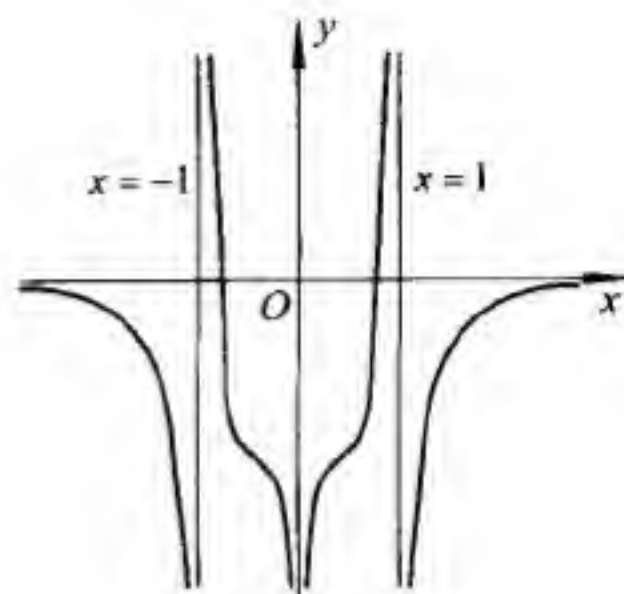


图 2.72

【1484】 $y = (x-3)\sqrt{x}$.

解 存在域: $0 \leq x < +\infty$. 零点处: $x=0$ 和 $x=3$.

$y' = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x=1$;

$y'' = \frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0$ ($0 < x < +\infty$),

所以, 图像始终是凹的.

由于 $y''|_{x=1} > 0$, 故当 $x=1$ 时有极小值 $y=-2$; 当 $x=0$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = -\infty$ 知, 曲线在 $x=0$ 点与 y 轴相切, 易见它有边界极大值 $y=0$.

图像如图 2.73 所示.

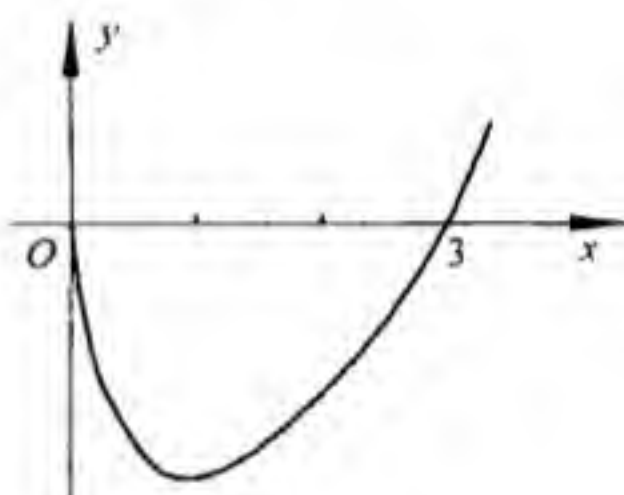


图 2.73

【1485】 $y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}$.

解 存在域: $8-x^2 \geq 0$, 即 $|x| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

零点处: $x=0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$.

图像关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之:

$y' = \frac{2(4-x^2)}{\sqrt{8-x^2}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x=2$.

$y'' = \frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{3/2}}$, 令 $y'' = 0$ 得 $x=2\sqrt{3}$ 或 $x=0$.

然而点 $x=2\sqrt{3}$ 不在存在域内, 对于 $x=0$ 来说, 如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一支曲线的话, 则也可理解为拐点. 同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况, 故曲线呈双纽状.

当 $0 < x < 2$ 时, $y' > 0$, 当 $2 < x < 2\sqrt{2}$ 时, $y' < 0$, 故当 $x=2$ 时, 有极大值 $y=4$. 当 $x=2\sqrt{2}$ 及 $x=0$ 时, 显然有极小值 $y=0$.

前者是边界的极小值, 而且曲线在 $x=2\sqrt{2}$ 处以 $x=2\sqrt{2}$ 为垂直切线. 图像如图 2.74 所示.

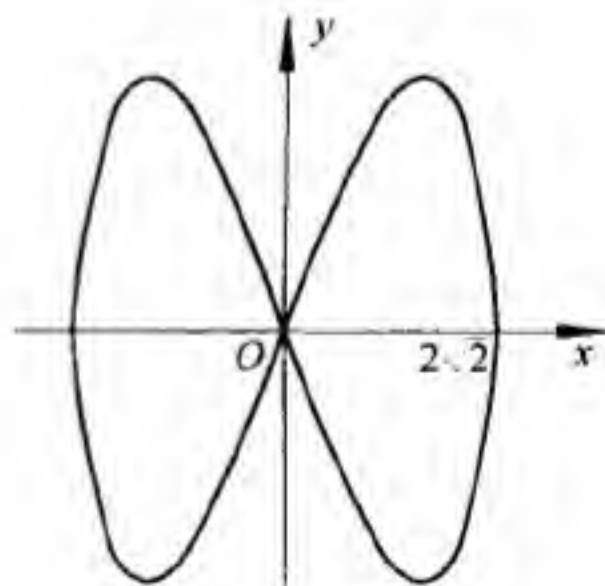


图 2.74

【1486】 $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 存在域: $1 \leq x \leq 2$ 及 $3 \leq x < +\infty$.

零点处: $x=1, x=2$ 和 $x=3$.

图像关于 Ox 轴对称. 下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{3x^2 - 12x + 11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}},$$

令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \approx 1.42$, 经判别知, 此时有极大值

$$|y| = \frac{1}{3} \sqrt[4]{12} \approx 0.62.$$

令 $y'' = 0$ 解得 $x \approx 3.468$, 经判别知, 它是拐点.

当 $x > 3$ 时, $y' > 0$, 函数递增, 其图像是上升的.

当 $x=1, 2$ 和 3 时有边界的极小值 $y=0$ 且 $y' = \infty$.

(图 2.75)

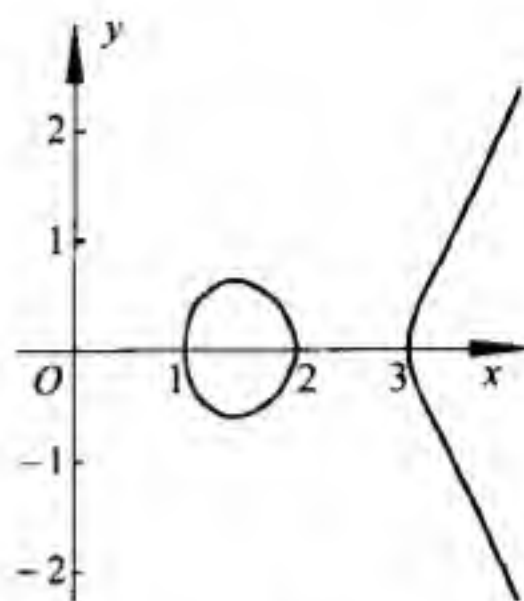


图 2.75

【1487】 $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解 零点处: $x=-1$ 和 $x=1$. 又当 $x=0$ 时, $y=1$.

渐近线: $y = x - \frac{1}{3}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -\frac{1}{3}.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3\sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -\frac{1}{3};$$

当 $x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$.

$$y'' = \frac{-8}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y'' = \infty.$$

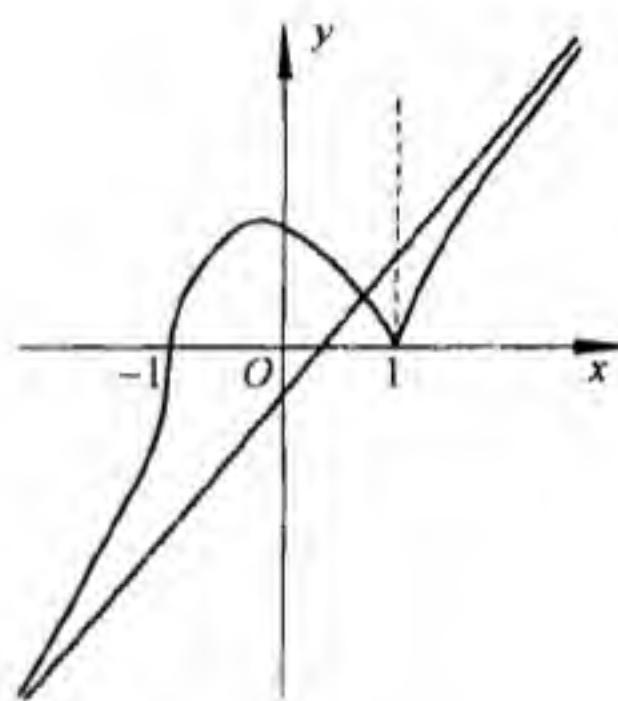


图 2.76

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y''	$+$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$-$
y	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -\frac{1}{3}$ 时, 有极大值 $y \approx 1.06$; 当 $x = 1$ 时, 有极小值 $y = 0$.

图像如图 2.76 所示.

【1488】 $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2 + 1)^{\frac{2}{3}}}.$$

当 x 经过 $x=0$ 时, y' 由负变正, 故当 $x=0$ 时有极小值 $y=-1$, 且 $y' \Big|_{x=0^-} = -\infty$, $y' \Big|_{x=0^+} = +\infty$, 又当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$. 同时, $y' = 0$ 和 $y = 0$ 均无实根, 故知图像是凸的, 且以 $y=0$ 为渐近线(图 2.77).

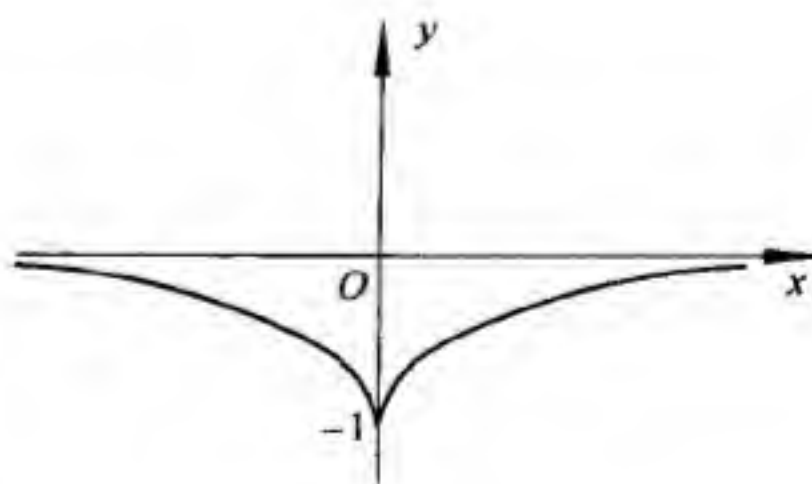


图 2.77

【1489】 $y = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以 $-x$ 替代 x , y 变成 $-y$, 故图像关于坐标原点对称.

渐近线: $y=0$. 零点处: $x=0$.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}} - (x+2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 2 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x+2)^{\frac{1}{3}} - (x-2)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{4}{3}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x=0.$$

列表

x		-2		0		2	
y'	-	∞	+	+	+	∞	-
y''	-	∞	-	0	+	∞	+
y	\searrow	最小点	\nearrow	拐点	\nearrow	最大点	\searrow

当 $x = -2$ 时, 有最小值 $y = -\sqrt[3]{16}$; 当 $x = 2$ 时, 有最大值 $y = \sqrt[3]{16}$.

图像如图 2.78 所示.

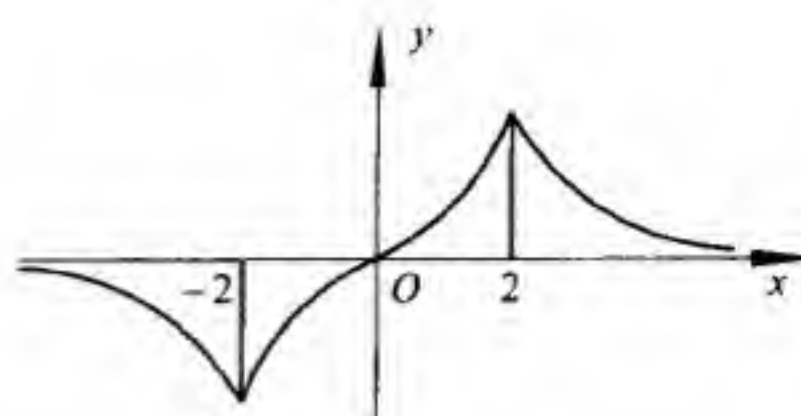


图 2.78

【1490】 $y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \right],$$

令 $y' = 0$ 得 $x=0$; 当 $x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$.

$$y'' = -\frac{2}{9} \left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} \right] < 0, \text{ 图像始终呈凸状.}$$

当 $x = \pm 1$ 时, 取得最小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = 2$.

图像如图 2.79 所示.

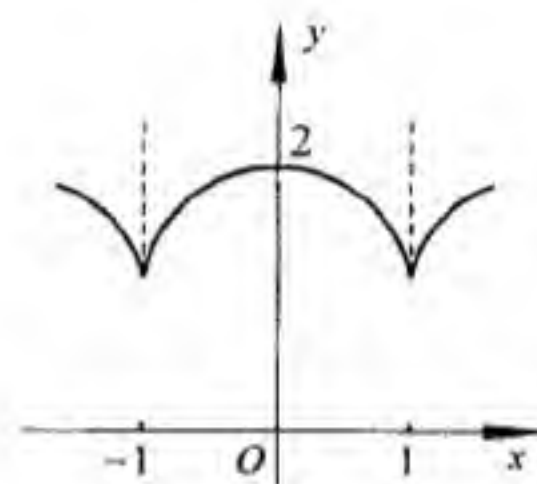


图 2.79

【1491】 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 图像关于坐标原点对称. 零点处: $x=0$. 不连续点: $x = \pm 1$.

$$y' = \frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = \pm\sqrt{3}. \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = -\frac{2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x=0 \text{ 或 } \pm 3.$$

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	-	∞	-	-	-	∞	-	0	+	+	+
y''	+	0	-	-	-	∞	+	0	-	∞	+	+	+	0	-
y	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow	不连续点	\searrow	拐点	\searrow	不连续点	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow

渐近线: $x = -1, x = 1$. 当 $x = \pm\sqrt{3}$ 时, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx \pm 1.38$; 当 $x = \pm 3$ 时, $y = \pm 1\frac{1}{2}$.

图像如图 2.80 所示.

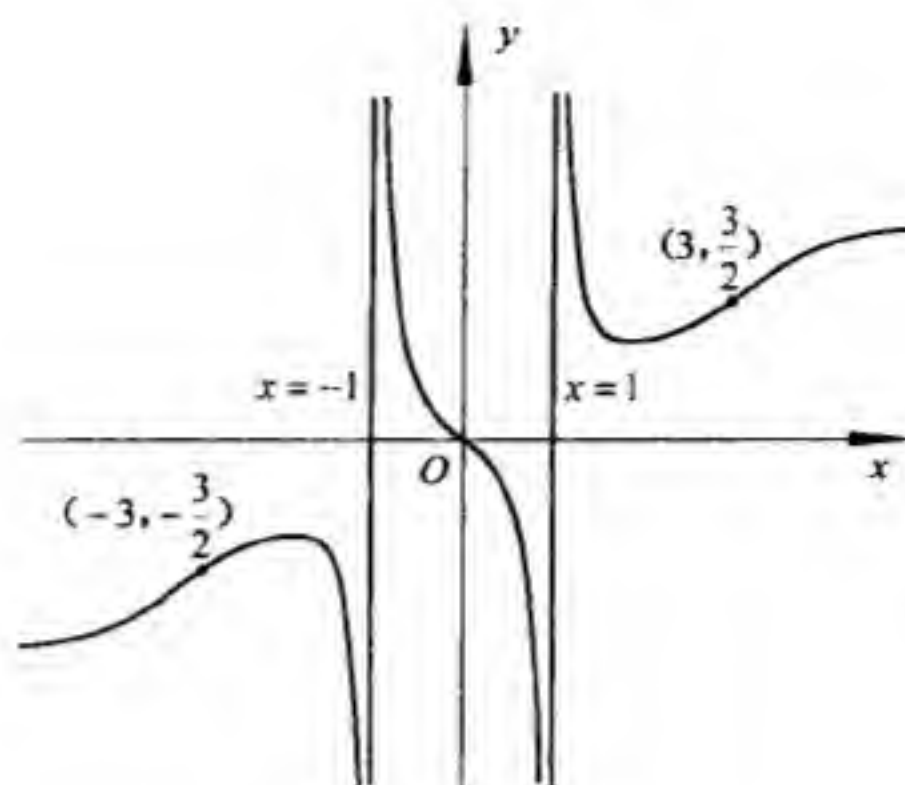


图 2.80

【1492】 $y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$.

解 存在域: $|x| \geq 1$ 及孤立点 $x=0$. 图像关于 Oy 轴对称, 且位于 Ox 轴的上方. 渐近线: $y = \pm \frac{x}{2}$.

$$y' = \frac{2x^5 - 3x^3 + 2x}{(2x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y'' = \frac{1}{(2x^2 - 1)^3 (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} (-6x^4 + 3x^2 + 2).$$

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, $y'' < 0$, 故图像上升, 且呈凸状. 又当 $x = \pm 1$ 时, 有边界的极小值 $y = 0$. (图 2.81)

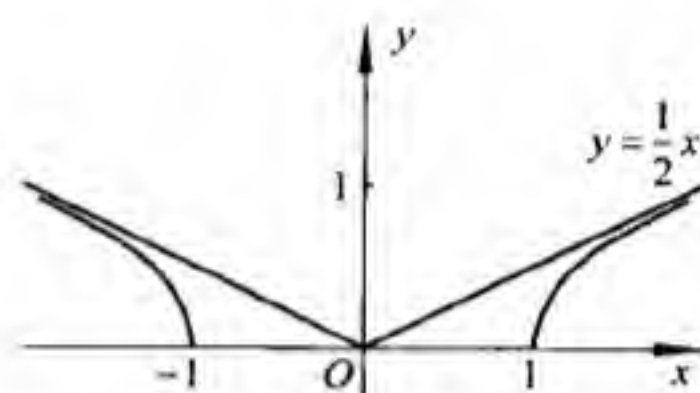


图 2.81

【1493】 $y = \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}$.

解 存在域: $x > 0$.

渐近线: $x=0$ 及 $y = x + \frac{3}{2}$.

$$y' = \frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0, \text{ 故图像是凹的.}$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 有极小值 $y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.60$.

图像如图 2.82 所示.

【1494】 $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 存在域: $x \geq 0$ 及 $x < -3$. 零点处: $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4.30$.

斜渐近线: $y = \frac{5}{2} - 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}.$$

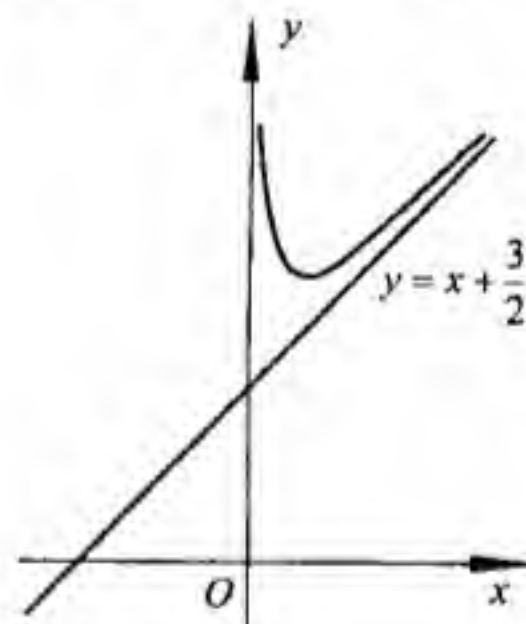


图 2.82

水平渐近线: $y = -\frac{1}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x - 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow -3} y = \infty$, 故垂直渐近线为 $x = -3$.

$$y' = -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -4;$$

$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2 \sqrt{x(x+3)}} > 0, \text{ 故图像呈凹状.}$$

当 $x = -4$ 时有极小值 $y = 13$. 当 $x = 0$ 时有边界极大值 $y = 1$.
图像如图 2.83 所示.

【1495】 $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}.$

解 零点处: $x = 0$. 垂直渐近线: $x = -1$.

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x(x+1)}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -2. \text{ 当 } x = 0 \text{ 时 } y' = \infty.$$

$$y'' = -\frac{2(x^2+4x+1)}{9x(x+1)^2 \sqrt[3]{x(x+1)}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -2 \pm \sqrt{3}.$$

经判别知:

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$; 当 $x = -2$ 时有极大值 $y = -\sqrt[3]{4} \approx -1.59$.

拐点: $x = -(2 - \sqrt{3}) \approx -0.27$, 此时 $y \approx 0.46$;

$x = -(2 + \sqrt{3}) \approx -3.73$, 此时 $y \approx -1.72$. 图像如图 2.84 所示.

【1496】 $y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}.$

解 图像关于 Oy 轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线: $y = \pm x$.

$$y' = \frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm 1.$$

$$y'' = \frac{-x^8+20x^6+18x^4+36x^2-9}{(x^4+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x \approx \pm 0.47 \text{ 或 } \pm 4.58,$$

经判别知, 它们均为拐点:

当 $x \approx \pm 0.47$ 时, $y \approx 1.58$; 当 $x \approx \pm 4.58$ 时, $y \approx 4.49$.

当 $x = 0$ 时有极大值 $y = \sqrt{3} \approx 1.73$;

当 $x = \pm 1$ 时有极小值 $y = \sqrt{2} \approx 1.41$.

图像如图 2.85 所示.

【1497】 $y = \sin x + \cos^2 x.$

提示 函数的周期 $T = 2\pi$, 故建议在闭区间 $[0, 2\pi]$ 内作其图像.

解 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $0 \leq x \leq 2\pi$ 内的图像讨论如下:

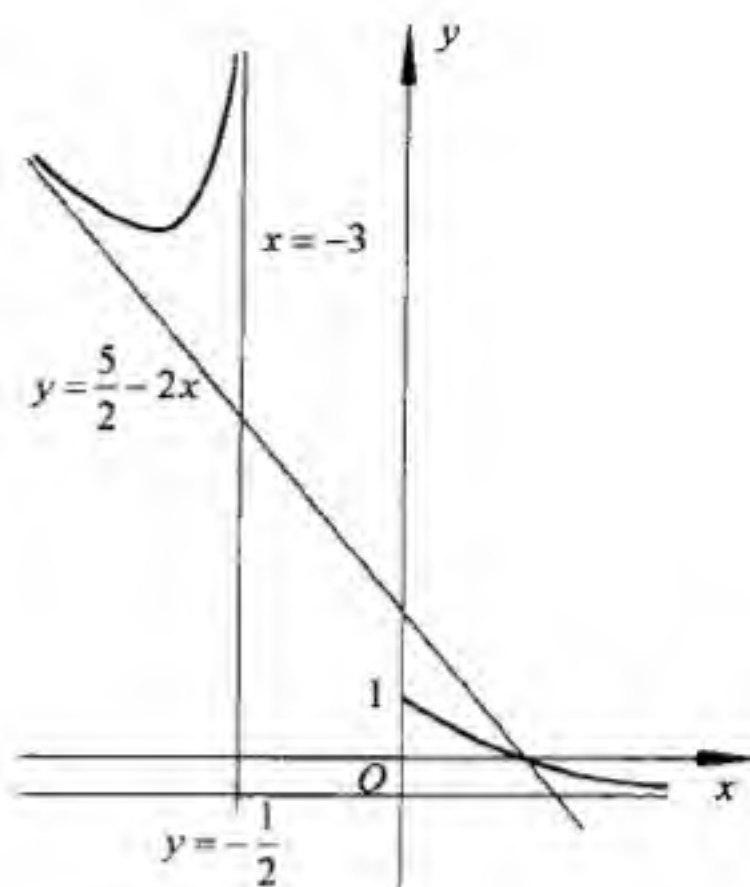


图 2.83

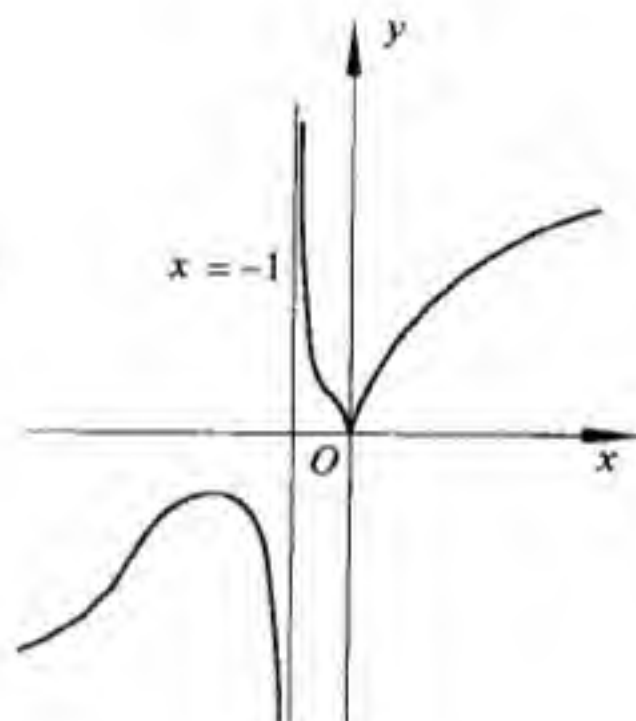


图 2.84

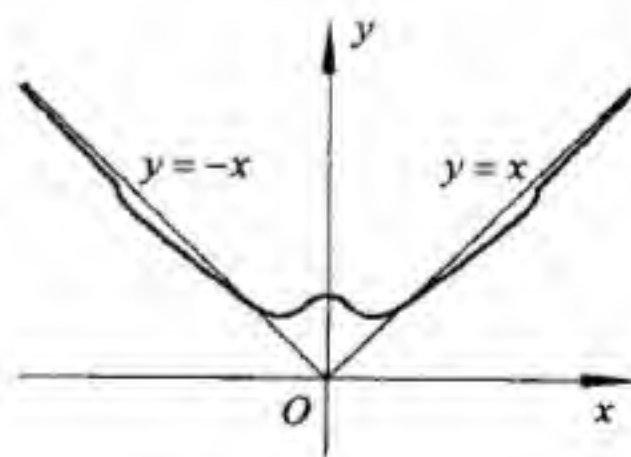


图 2.85

零点处: $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.21\pi$ 及 $x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.79\pi$.

$y' = \cos x(1-2\sin x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ 及 $\frac{3\pi}{2}$;

$y'' = -\sin x - 2\cos 2x$, 令 $y'' = 0$ 得 $4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$,

解之得

$$x_1 = \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_1 \approx 1.13;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1+\sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_2 \approx 1.13;$$

$$x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}, \text{ 此时 } y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33}-1}{8}, \text{ 此时 } y_4 \approx 0.055,$$

经判断知: $x_1 \approx 0.32\pi, x_2 \approx 0.68\pi, x_3 \approx 1.20\pi, x_4 \approx 1.80\pi$

均为拐点;

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值 $y = 1$; 当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时有极大值 $y = -1$;

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 和 $x = \frac{5\pi}{6}$ 时, 有极大值 $y = 1\frac{1}{4}$. 如图 2.86 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{4}\right), C(0.32\pi, 1.13), D\left(\frac{\pi}{2}, 1\right), E(0.68\pi, 1.13), F\left(\frac{5\pi}{6}, 1\frac{1}{4}\right),$$

$$G(1.20\pi, 0.055), H\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), K(1.80\pi, 0.055) \text{ 和 } L(2\pi, 1).$$

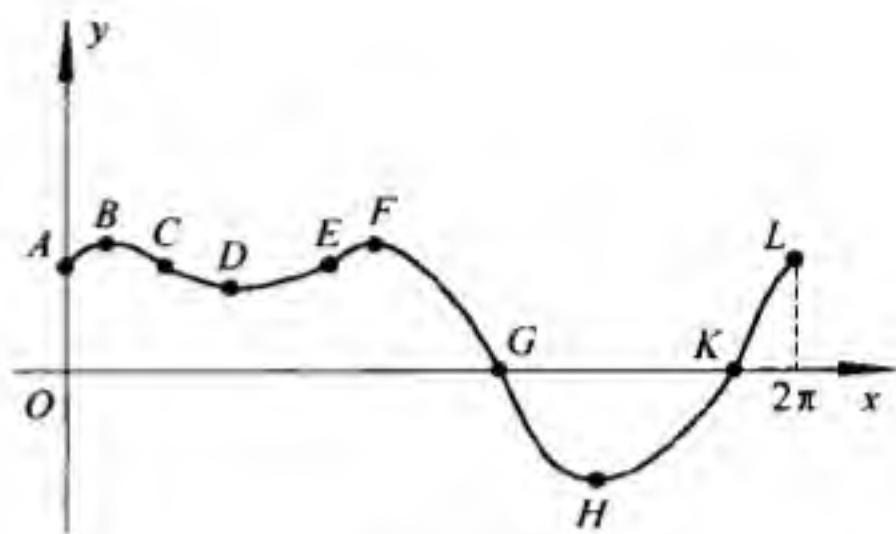


图 2.86

【1498】 $y = (7 + 2\cos x)\sin x$.

提示 由于图像关于坐标原点对称, 又函数的周期 $T = 2\pi$, 故建议在 $[-\pi, \pi]$ 内作其图像.

解 图像关于原点对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内的图像讨论如下:

零点处: $x = 0$ 或 $\pm\pi$.

$y' = 7\cos x + 2\cos 2x$, 令 $y' = 0$ 得 $2\cos 2x + 7\cos x = 0$, 解之得

$$x = \arccos \frac{1}{4} \approx 0.42\pi, \quad x = -\arccos \frac{1}{4} \approx -0.42\pi.$$

$y'' = -7\sin x - 4\sin 2x$, 令 $y'' = 0$ 得 $\sin x(7 + 8\cos x) = 0$, 解之得 $x_1 = 0$,

此时 $y_1 = 0$;

$$x_{2,3} = \pm \arccos\left(-\frac{7}{8}\right) \approx \pm 0.84\pi, \text{ 此时 } y_{2,3} \approx \pm 2.54;$$

$$x_{4,5} = \pm\pi, \text{ 此时 } y_{4,5} = 0.$$

经判别知: 点 x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_5 均为拐点;

当 $x = -\arccos \frac{1}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7.3$;

当 $x = \arccos \frac{1}{4}$ 时有极大值 $y = \frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7.3$. 图像如图 2.87 所示, 图中

主要点的坐标:

$$A(0.42\pi, 7.3), B(0.84\pi, 2.54), C(\pi, 0);$$

$$A'(-0.42\pi, -7.3), B'(-0.84\pi, -2.54), C'(-\pi, 0).$$

【1499】 $y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

解 图像关于坐标原点对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图像.

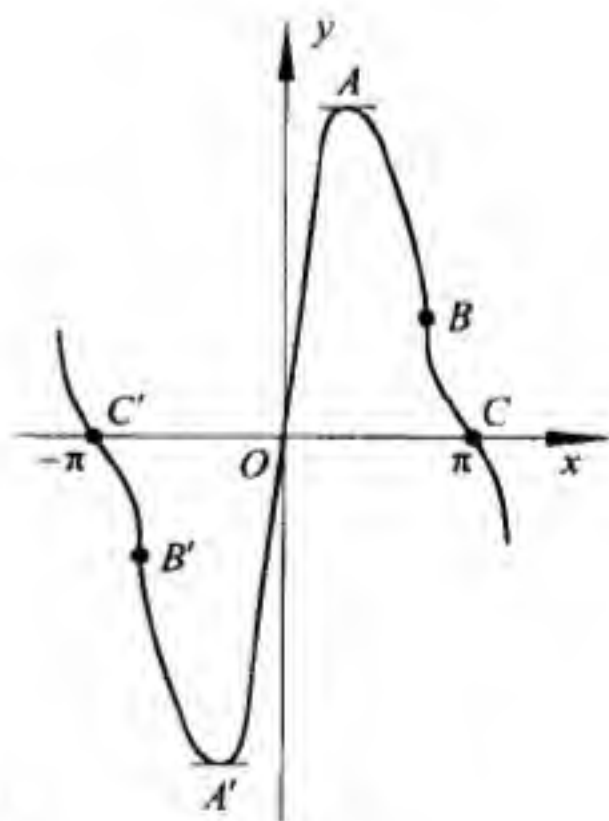


图 2.87

零点处: $x=0$ 或 $\pm\pi$.

$$y' = \cos x + \cos 3x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4};$$

$$y'' = -\sin x - 3\sin 3x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi, \quad y_{2,3} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} \approx \pm 0.81;$$

$$x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0.63\pi, \quad y_{4,5} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} \approx \pm 0.81;$$

$$x_{6,7} = \pm \pi, \quad y_{6,7} = 0.$$

经判别知: 点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 和 x_7 均为拐点;

极小值: 当 $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 时, $y = -\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0.94$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $y = \frac{2}{3}$;

极大值: 当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时, $y = -\frac{2}{3}$ 当 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 时, $y = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0.94$.

图像如图 2.88 所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(\frac{\pi}{4}, 0.94\right), \quad B(0.37\pi, 0.81), \quad C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right), \quad D(0.63\pi, 0.81), \quad E\left(\frac{3\pi}{4}, 0.94\right), \quad F(\pi, 0);$$

点 A', B', C', D', E', F' 和点 A, B, C, D, E, F 关于原点对称.

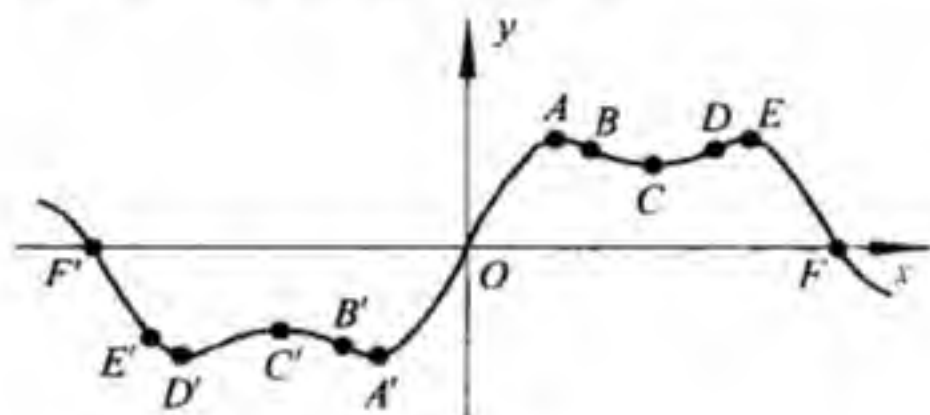


图 2.88

【1500】 $y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x.$

解 图像关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图像.

零点处: $x = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi.$

$$y' = -\sin x + \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi.$$

$$y'' = -\cos x + 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi, \quad y_{1,2} \approx 0.63;$$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, \quad y_{3,4} \approx -0.44.$$

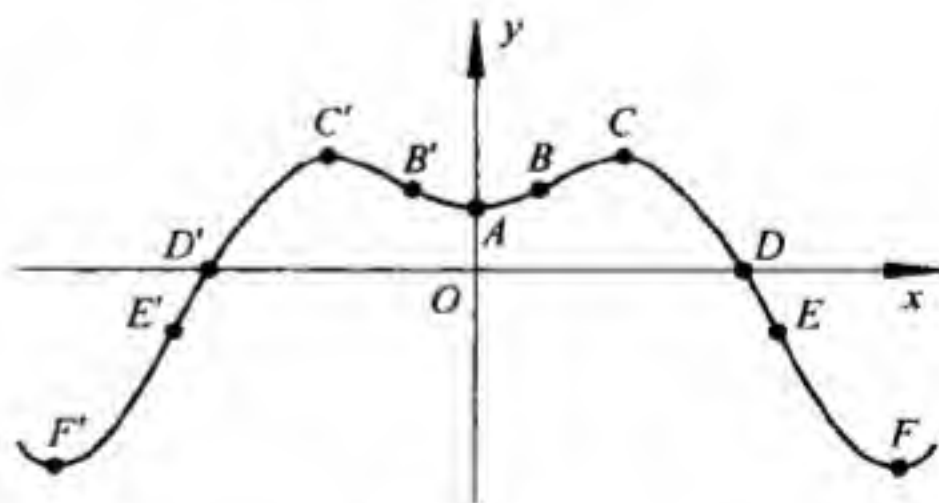


图 2.89

经判别知: 点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点;

当 $x=0$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2}$; 当 $x = \pm\pi$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{2}$; 当 $x = \pm\frac{\pi}{3}$ 时有极大值 $y = \frac{3}{4}$.

图像如图 2.89 所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad B(0.18\pi, 0.63), \quad C\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right), \quad D(0.62\pi, 0), \quad E(0.70\pi, -0.44), \quad F\left(\pi, -\frac{3}{2}\right);$$

点 B', C', D', E', F' 与点 B, C, D, E, F 关于 Oy 轴对称.

【1501】 $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

提示 由于函数的图像关于 Oy 轴对称, 且其周期 $T = \frac{\pi}{2}$, 故建议在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 内作其图像.

解 图像关于 Oy 轴对称. 由于

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(3 + \cos 4x),$$

故函数的周期 $T = \frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 内讨论图像.

$$y' = -\sin 4x, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8}, y_{1,2} = \frac{3}{4}.$$

经判别知: 点 x_1 和 x_2 均为拐点;

当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$; 当 $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2}$.

图像如图 2.90 所示, 图中主要点的坐标: $A(0, 1)$, $B(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4})$, $C(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$.

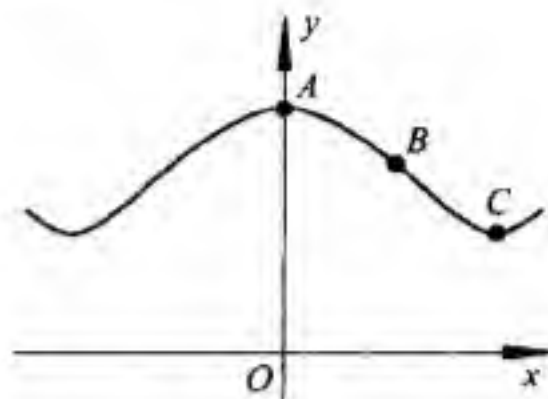


图 2.90

【1502】 $y = \sin x \sin 3x$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

由于 $y = \sin x \sin 3x = -\left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}$, 故函数的周期 $T = \pi$. 在一周期 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 内讨论图像.

零点处: $x = 0$ 或 $\pm \frac{\pi}{3}$.

$$y' = 2\sin 4x - \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}.$$

$$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx 0.11\pi, y_{1,2} \approx 0.29;$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi, y_{3,4} \approx -0.24.$$

经判别知:

点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点;

极小值: 当 $x = 0$ 时 $y = 0$, 当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $y = -1$;

极大值: 当 $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 时, $y = \frac{9}{16}$.

图像如图 2.91 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0.11\pi, 0.29), B(0.21\pi, \frac{9}{16}), C(\frac{\pi}{3}, 0), D(0.36\pi, -0.24), E(\frac{\pi}{2}, -1).$$

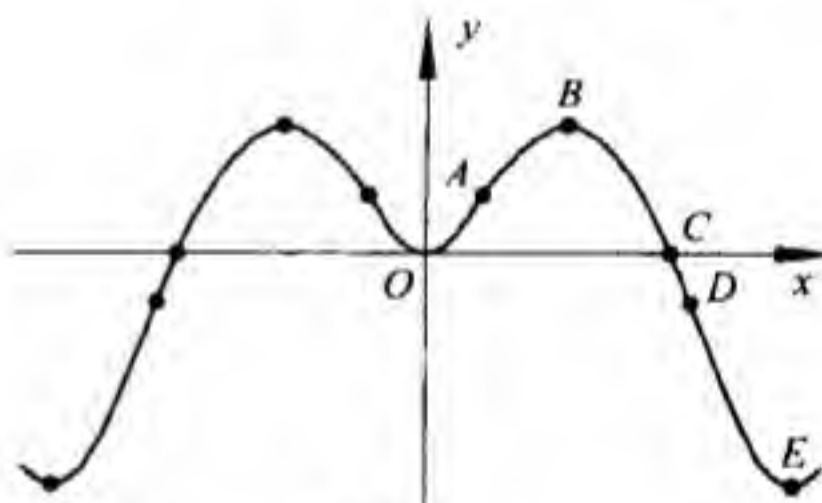


图 2.91

【1503】 $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}$.

解 利用 $\sin(\pi + x) = -\sin x$, 易知函数的周期 $T = \pi$. 在一周期 $0 \leq x \leq \pi$ 内讨论图像.

不连续点: $x = \frac{3\pi}{4}$. 零点处: $x = 0$ 或 π . 渐近线: $x = \frac{3\pi}{4}$.

$$y' = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin^2(x + \frac{\pi}{4})} > 0, \text{ 无极值, 函数递增, 其图像是上升的.}$$

$$y'' = -\frac{2\sin \frac{\pi}{4} \cos(x + \frac{\pi}{4})}{\sin^3(x + \frac{\pi}{4})}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \frac{\pi}{4}, \text{ 对应的 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

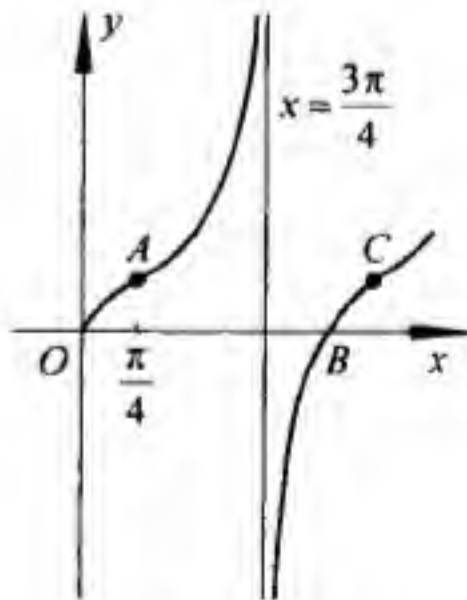


图 2.92

经判别知, 它为拐点. 图像如图 2.92 所示, 图中主要点的坐标: $A(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(\pi, 0)$ 和 $C(\frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

【1504】 $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 图像关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T=2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图像.

零点处: $x = \pm \frac{\pi}{2}$. 渐近线: $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 及 $x = \pm \frac{3\pi}{4}$.

$$y' = \frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{\cos^2 2x}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm \pi;$$

$$y'' = \frac{1}{\cos^3 2x} [3\cos x \cos^2 2x + 4\sin 2x \sin x (1+2\cos^2 x)], \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

经判别知:

当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$;

当 $x=\pm\pi$ 时有极大值 $y=-1$; 点 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 均为拐点, 此时 $y=0$.

当 $0 < x < \pi$ 时, $y' > 0$, 函数递增, 其图像是上升的; 当 $-\pi < x < 0$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像是下降的. 图像如图 2.93 所示.

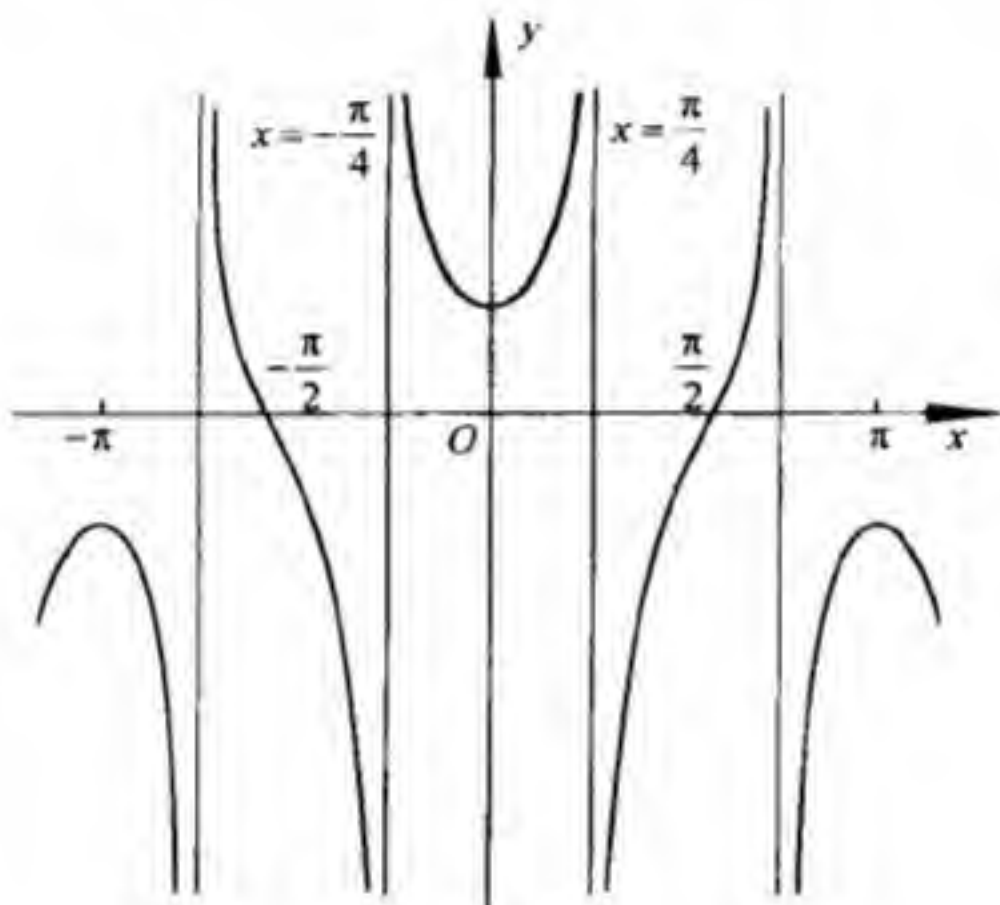


图 2.93

【1505】 $y = 2x - \tan x$.

解 零点处: $x=0$ 及 $x \approx \pm 0.37\pi, \dots$. 对称中心: $(k\pi, 2k\pi) (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

$$\text{渐近线: } x = \frac{2k+1}{2}\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$y' = 2 - \sec^2 x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ 或 } x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

经判别知: 当 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 时, 有极大值 $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$;

当 $x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ 时, 有极小值

$$y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right) \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

$$y'' = -2\sec^2 x \tan x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

经判别知, 此为拐点.

图像如图 2.94 所示 (仅描绘从 $-\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 区间内的图像).

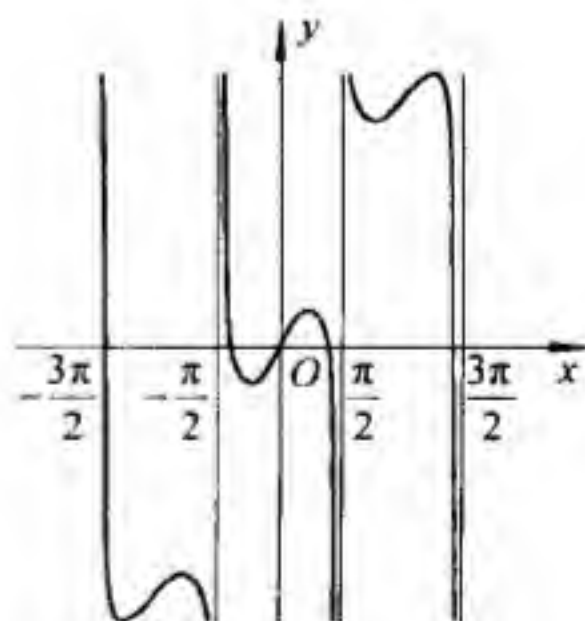


图 2.94

【1506】 $y = e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的, 故图像在 Ox 轴的上方. $y = e^{-(x-1)^2+1}$, 于是, 图像关于直线 $x=1$ 对称.

渐近线: $y=0$.

$y'=(2-2x)e^{2x-x^2}$, 令 $y'=0$ 得 $x=1$,

经判别知, 此时有极大值 $y=e$;

$y''=2(2x^2-4x+1)e^{2x-x^2}$, 令 $y''=0$ 得 $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

经判别知, 它为拐点, $y=\sqrt{e}\approx 1.65$.

图像如图 2.95 所示, 图中各点的位置:

$A(0,1)$, $B(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e})$, $C(1,e)$, $D(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e})$.

【1507】 $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

解 图像关于 Oy 轴对称, 在 Ox 轴的上方.

渐近线: $y=0$.

$y'=-2x^3e^{-x^2}$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$, 经过 $x=0$ 点, 导数 y' 从正变负, 所以, 当 $x=0$ 时取极大值 $y=1$.

$y''=2x^2e^{-x^2}(2x^2-3)$, 令 $y''=0$ 得 $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm 1.22$,

经判别知, 它为拐点, 而 $y=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx 0.56$.

图像如图 2.96 所示, 图中主要点的坐标: $A(0,1)$, $B(1.22, 0.56)$.

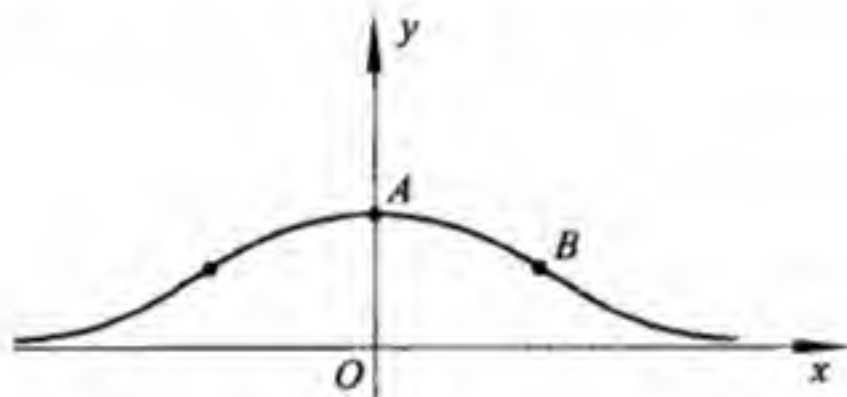


图 2.96

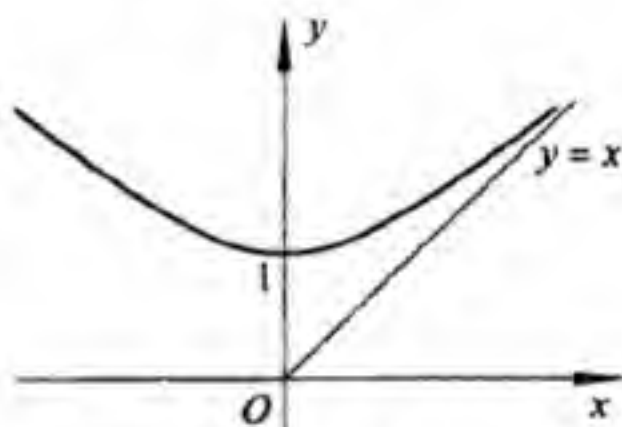


图 2.97

【1508】 $y=x+e^{-x}$.

解 $y'=1-e^{-x}$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$, $y=1$, $y''=e^{-x}>0$, 图像是凹的, 故当 $x=0$ 时有极小值 $y=1$.

斜渐近线: $y=x$. 事实上, $k=\lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{y}{x}=1$, $b=\lim_{x\rightarrow+\infty}(y-kx)=0$.

图像如图 2.97 所示.

【1509】 $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点处: $x=0$. 渐近线: $y=0$ (当 $x\rightarrow+\infty$ 时).

$y'=-x^{-\frac{1}{3}}e^{-x}(x-\frac{2}{3})$, 令 $y'=0$ 得 $x=\frac{2}{3}$, 当 $x=0$ 时, $y'=\infty$.

经判别知: 当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$, 且 $(0,0)$ 点为尖点.

当 $x=\frac{2}{3}$ 时有极大值 $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}\approx 0.39$. 由此可知函数值

始终为正的, 故图像在 Ox 轴上方.

$y''=\frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2-12x-2)$, 令 $y''=0$, 得

$x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx -0.15$, $y_1\approx 0.34$, $x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx 1.48$, $y_2\approx 0.30$, 经判别知, 它们均为拐点.

图像如图 2.98 所示, 图中主要点的坐标:

$A(-0.15, 0.34)$, $B(\frac{2}{3}, 0.39)$, $C(1.48, 0.30)$.

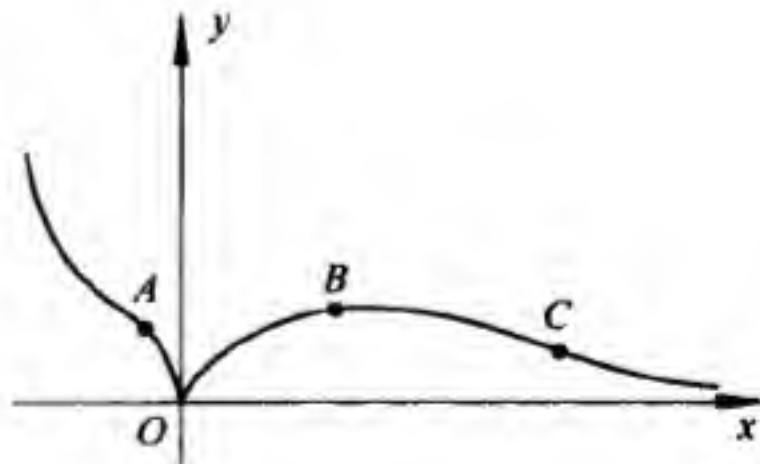


图 2.98

【1510】 $y = \frac{e^x}{1+x}$.

解 当 $x < -1$ 时, 函数值为负的, 当 $x > -1$ 时, 函数值为正的.

不连续点: $x = -1$. 垂直渐近线: $x = -1$.

又水平渐近线: $y = 0$ (当 $x \rightarrow -\infty$ 时). 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0. \text{ 经判别知, 此时有极小值 } y = 1.$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}, \text{ 当 } x < -1 \text{ 时, } y'' < 0, \text{ 故图像是凸的; 当 } x > -1 \text{ 时, } y'' > 0,$$

故图像是凹的. 图像如图 2.99 所示.

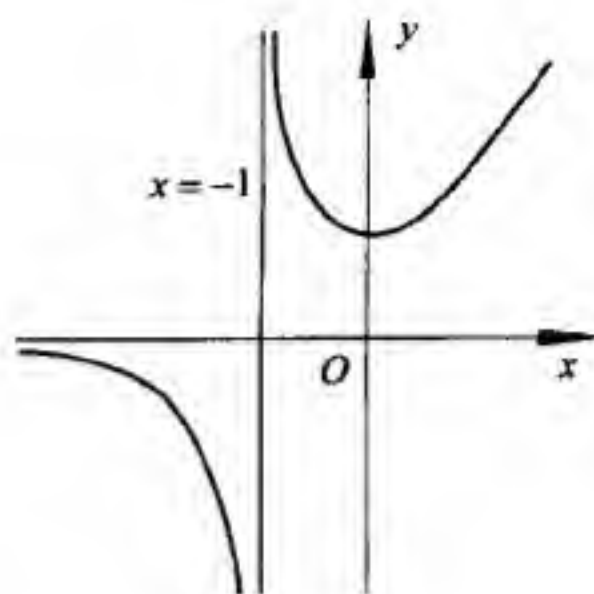


图 2.99

【1511】 $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

零点处: $x = 0$. 函数值不为负. 当 $x = 0$ 时有最小值 $y = 0$. 渐近线: $y = 1$.

$$y' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}, \text{ 当 } x < 0, y' < 0; \text{ 当 } x > 0, y' > 0.$$

$$y'' = e^{-x^2} \frac{1 - 3x^2 - e^{-x^2} + 2x^2 e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2}) \sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t) = 1 - 3t - e^{-t} + 2te^{-t}$ ($0 \leq t < +\infty$), 易证 $g(t) \leq 0$.

于是, 对于 $x \neq 0$, 恒有 $y'' < 0$, 即图像呈凸状. 而 $(0, 0)$ 点为尖点 (图 2.100).

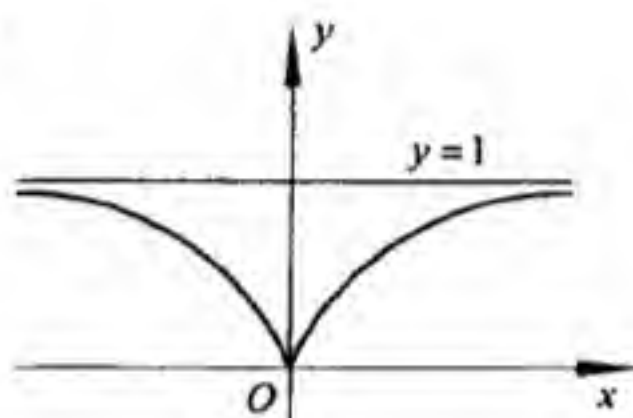


图 2.100

【1512】 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 存在域: $x > 0$. 零点处: $x = 1$. 渐近线: $x = 0$ ($x \rightarrow +0$), $y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$).

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = e^2 \approx 7.39. \text{ 经判别知, 此时有极大值 } y = \frac{2}{e} \approx 0.74.$$

$$y'' = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39, \text{ 经判别知, 此为拐点, 此时 } y = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{3}} \approx 0.70.$$

图像如图 2.101 所示. 图中主要点的坐标: $A(1, 0)$, $B(7.39, 0.74)$, $C(14.39, 0.70)$.

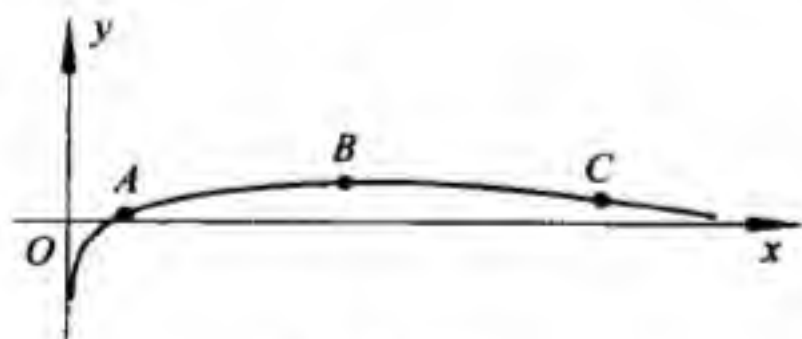


图 2.101

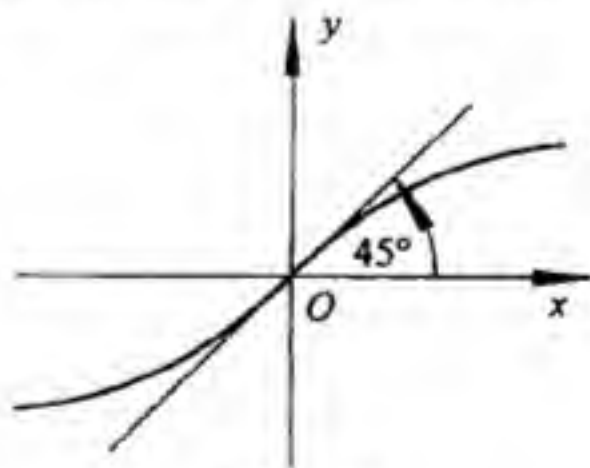


图 2.102

【1513】 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 由于 $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 故图像关于坐标原点对称. 零点处: $x = 0$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \text{ 故函数递增, 其图像始终上升, 无极值点.}$$

$$y'' = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0, \text{ 在此点切线斜率为 } k = 1.$$

经判别知, 此为拐点, 此时 $y = 0$. 图像如图 2.102 所示.

【1514】 $y = \sqrt{x^2+1} \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

解 图像关于坐标原点对称.

零点处: $x=0$.

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad y'' = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x \sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的. 当 $x < 0$ 时, 由对称性知图像是凸的. 于是, 点 $x=0$ 为拐点, 在此点切线斜率为 $k=1$.

从而, 函数图像始终上升, 如图 2.103 所示.

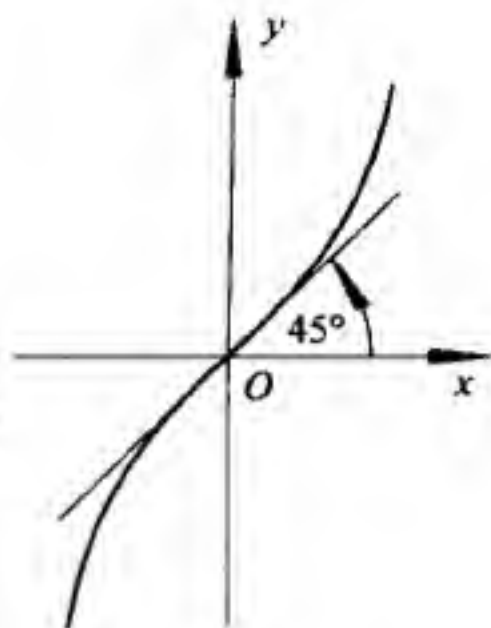


图 2.103

【1515】 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 图像关于坐标原点对称.

零点处: $x=0$. 存在域: $|x| < 1$. 渐近线: $x = \pm 1$.

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (|x| < 1), \text{ 故函数递增, 其图像始终上升.}$$

$$y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x=0.$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图像是凸的. 当 $0 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图像是凹的. 点 $x=0$ 为拐点, 在此点切线斜率为 $k=1$.

图像如图 2.104 所示.

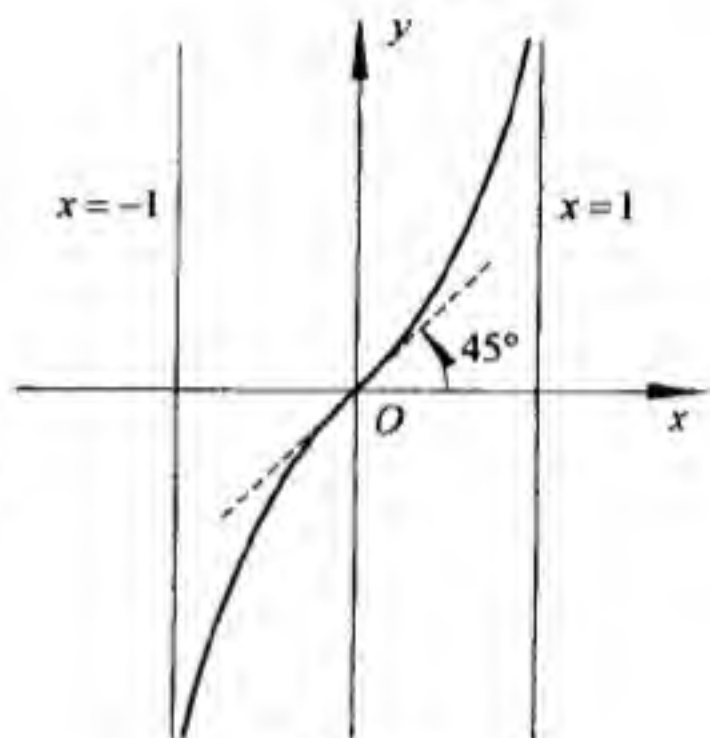


图 2.104

【1516】 $y = x + \arctan x$.

解 图像关于坐标原点对称.

零点处: $x=0$.

渐近线: $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$. 事实上, $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$.

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = -\frac{\pi}{2}, \quad b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \frac{\pi}{2}.$$

$$y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0, \text{ 故函数递增, 图像始终上升, 无极值点.}$$

$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, 令 $y'' = 0$ 得 $x=0$, 经判别知, 它为拐点, 在此点切线斜率为 $k=2$.

图像如图 2.105 所示.

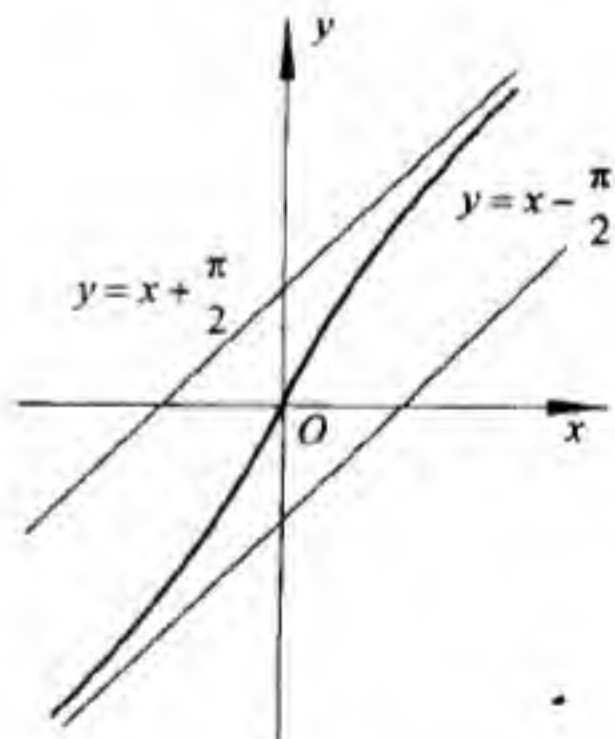


图 2.105

【1517】 $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arccot} x$.

解 零点处: $x \approx -5.95$.

渐近线: $y = \frac{x}{2} + \pi$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{2} + \operatorname{arccot} x}{x} = \frac{1}{2}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x}{2} + \operatorname{arccot} x \right) - \frac{1}{2}x \right] = \pi;$$

同法还可得渐近线 $y = \frac{x}{2}$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \pm 1.$$

当 $x < -1$ 及当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 函数递增, 其图像上升;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像下降;

故当 $x=1$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx 1.285$,

当 $x=-1$ 时有极大值 $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx 1.856$.

$y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, 令 $y''=0$ 得 $x=0$.

当 $x<0$ 时, $y''<0$, 故图像是凸的.

当 $x>0$ 时, $y''>0$, 故图像是凹的.

从而有拐点 $x=0$, 此时 $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=-\frac{1}{2}$.

图像如图 2.106 所示.

【1518】 $y=x\arctan x$.

解 零点处: $x=0$. 图像关于 Oy 轴对称.

函数值不为负, 故图像始终在 Ox 轴上方.

渐近线:

$y=-\frac{\pi}{2}x-1$ (当 $x\rightarrow-\infty$ 时); $y=\frac{\pi}{2}x-1$ (当 $x\rightarrow+\infty$ 时).

$y'=\frac{x}{1+x^2}+\arctan x$, 令 $y'=0$ 得 $x=0$. 当 $x<0$ 时, $y'<0$, 函数递减, 其图像下降; 当 $x>0$ 时, $y'>0$, 函数递增, 其图像上升, 故当 $x=0$ 时, 有极小值 $y=0$.

$y''=\frac{2}{(1+x^2)^2}>0$, 图像是凹的.

图像如图 2.107 所示.

【1519】 $y=\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

解 零点处: $x=0$. 图像关于坐标原点对称. 渐近线: $y=0$. 事实上,

$$k=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2}}{x}=0, \quad b=\lim_{x\rightarrow\infty}(y-kx)=0, \quad y'=\frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2} \quad (|x|\neq 1).$$

当 $|x|<1$ 时, $y'>0$, 函数递增, 其图像上升,

当 $|x|>1$ 时, $y'<0$, 函数递减, 其图像下降,

当 $x=1$ 时, 直接从定义出发, 可得 $y'_-(1)=1$, $y'_+(1)=-1$,

故点 $(1, \frac{\pi}{2})$ 为角点, 且当 $x=1$ 时有最大值 $y=\frac{\pi}{2}$.

利用对称性可知点 $(-1, -\frac{\pi}{2})$ 也为角点, 且当 $x=-1$ 时

有最小值 $y=-\frac{\pi}{2}$:

$$y'_-(-1)=-1, \quad y'_+(-1)=1.$$

当 $x=0$ 时, $y'=2$. 又点 $x=0$ 为拐点.

图像如图 2.108 所示.

【1520】 $y=\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 零点处: $x=0$. 图像关于 Oy 轴对称. 函数值不为负, 故图像始终在 Ox 轴上方.

渐近线: $y=\pi$. 事实上,

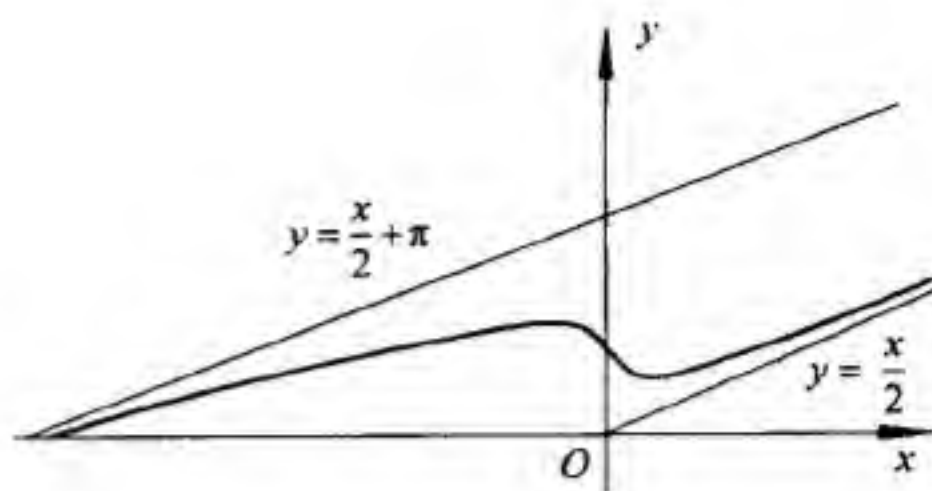


图 2.106

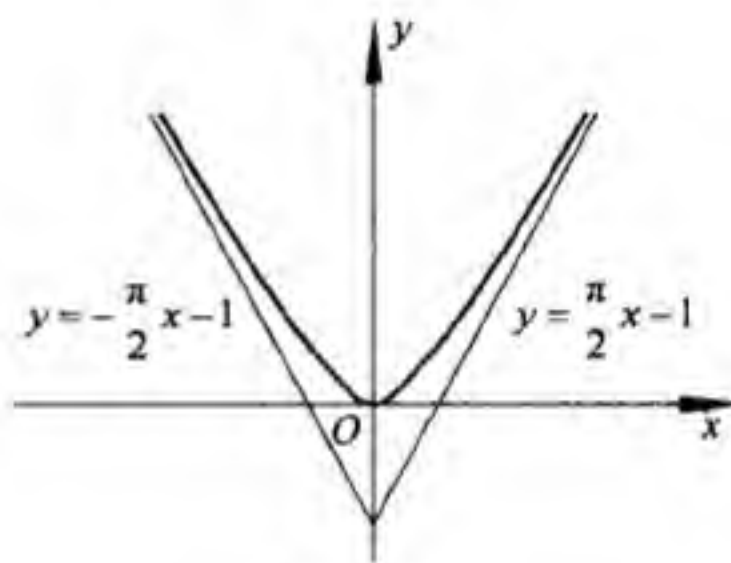


图 2.107

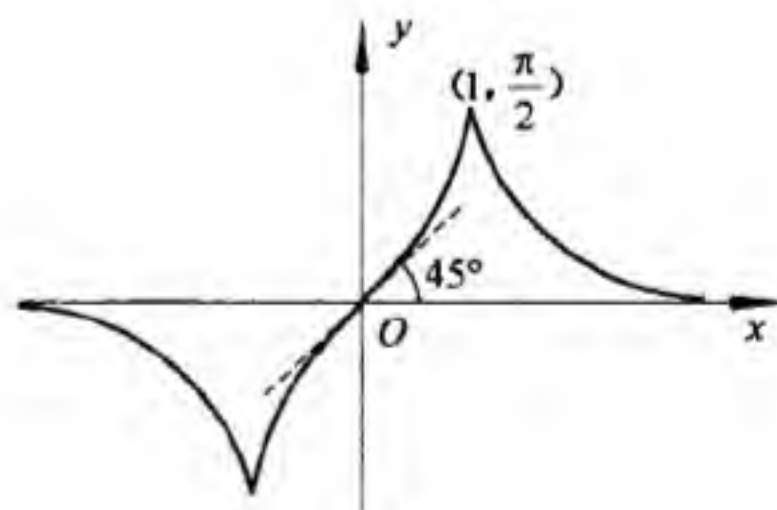


图 2.108

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi.$$

$y' = \frac{2}{1+x^2} > 0 (x > 0)$, 函数递增, 其图像上升. 当 $x=0$ 时, 直接从定义出发, 得 $y'_+(0) = 2$.

由对称性知, $y'_-(0) = -2$, 且当 $x < 0$ 时, 函数递减, 其图像下降, 故当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$. 此点为角点.

$y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} < 0 (x > 0)$, 图像是凸的. 由对称性知, 当 $x < 0$ 时, 图像也是凸的. 图像如图 2.109 所示.

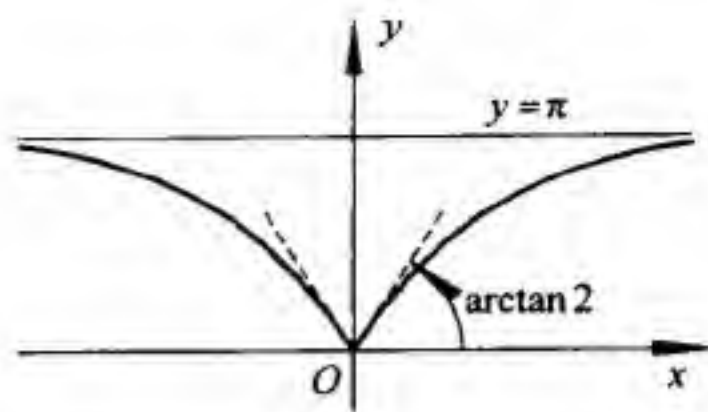


图 2.109

【1521】 $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处: $x = -2$. 不连续点: $x = 0$. 渐近线: $y = x + 3$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 + x + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right] = 3.$$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right). \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 2 \text{ 或 } -1.$$

当 $0 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像下降; 当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像下降; 当 $x < -1$ 及 $x > 2$ 时, $y' > 0$, 函数递增, 其图像上升;

故当 $x = -1$ 时有极大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

当 $x = 2$ 时有极小值 $y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^3} \right). \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -\frac{2}{5},$$

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时, $y'' < 0$, 图像是凸的,

当 $x > -\frac{2}{5} (x \neq 0)$ 时, $y'' > 0$, 图像是凹的, 故该点是拐点,

$$\text{此时 } y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13.$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty.$$

图像如图 2.110 所示. 图中各点的位置:

$$A(-2, 0), \quad B(-1, 0.37), \quad C(-0.40, 0.13), \quad D(2, 6.59).$$

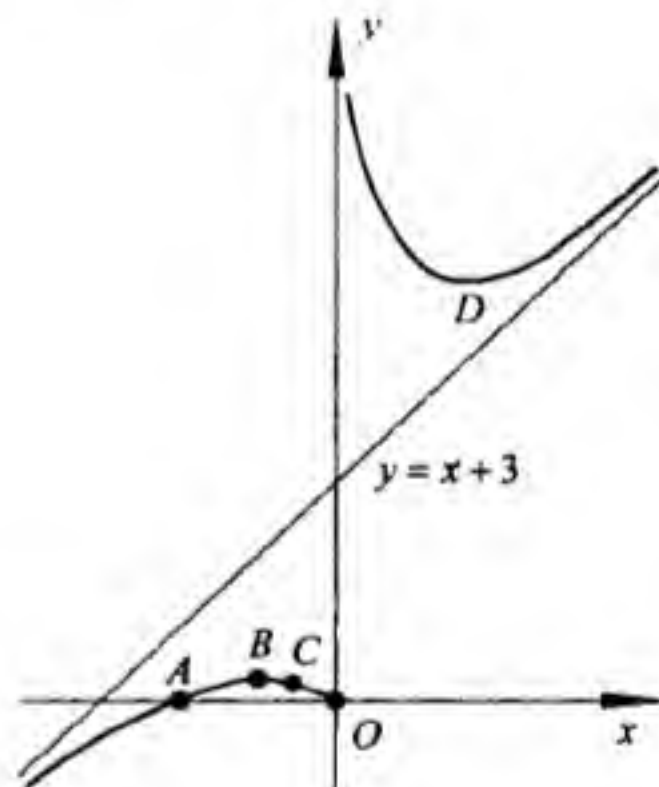


图 2.110

【1522】 $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

解 存在域: $|x| \geq 1$. 图像关于 Oy 轴对称. 渐近线: $y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}] = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时有边界的极大值 $y = 2^{\sqrt{2}} \approx 2.67$.

$$y'_+(1) = -\infty, \quad y'_-(-1) = +\infty.$$

$$y'(x) = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right),$$

故当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 函数递增, 其图像上升; $x > 1$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像下降.

$$y''(x) = (\ln 2)^2 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2 + \ln 2 \cdot 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0,$$

故图像呈凹状. 图像如图 2.111 所示.

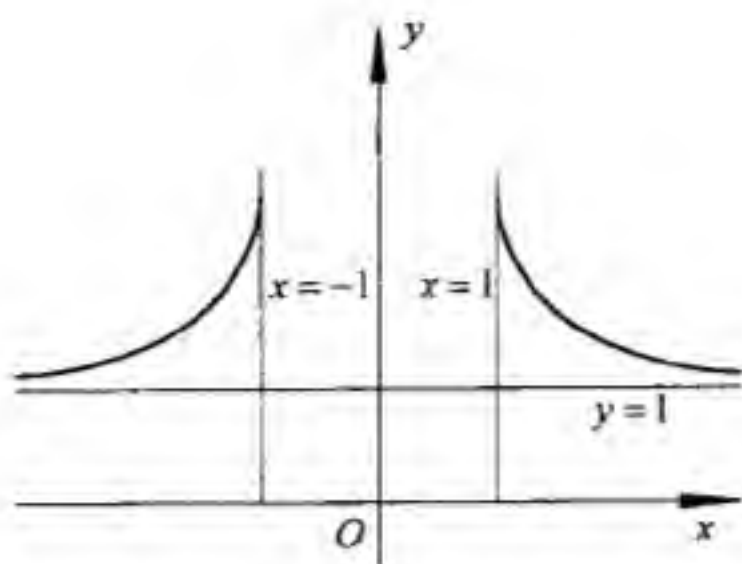


图 2.111

【1523】 $y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$.

解 存在域: $x < -1$ 及 $x > 2$. 与坐标轴的交点: $(0, \ln 2)$ 及 $(\frac{1}{3}, 0)$.

渐近线: $y = 0$. 事实上, $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}}{x} = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0$.

$y' = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1 - \sqrt{10}}{3} \approx -0.72$ (另一根不在存在域内), 经判别知, 当

$x \approx -0.72$ 时有极大值 $y \approx 1.12$.

$$y'' = \frac{-6x^5 + 15x^4 - 30x^2 + 30x - 13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -1.52$. 经判别知, 它为拐点, 此时 $y \approx 0.99$.

当 $x < -1.52$ 时, $y'' > 0$, 图像是凹的.

当 $x > 2$ 时, $y'' < 0$, 图像是凸的.

当 $x \rightarrow 1-0$ 及 $x \rightarrow 2+0$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

图像如图 2.112 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(-1.52, 0.99), \quad B(-0.72, 1.12),$$

$$C(0, \ln 2), \quad D\left(\frac{1}{3}, 0\right).$$

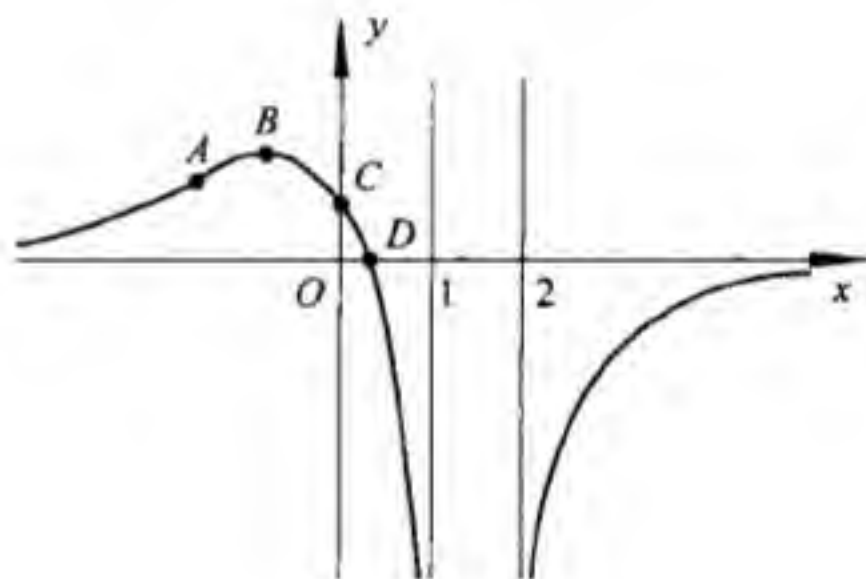


图 2.112

【1524】 $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

解 存在域: $|x| \leq a$. 与坐标轴交点: $(0, -a)$ 及 $(0.67a, 0)$.

当 $x = -a$ 时有边界的极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$. 当 $x = a$ 时有边界的极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$.

$$y' = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} > 0 \quad (\text{当 } |x| < a \text{ 时}),$$

故函数递增, 其图像上升. 又

$$y'_-(a) = +\infty, \quad y'_+(-a) = 0, \quad y'' = \frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (|x| < a),$$

故图像是凹的.

图像如图 2.113 所示. 图中主要点的坐标:

$$A\left(-a, -\frac{\pi}{2}a\right), \quad B(0, -a), \quad C(0.67a, 0), \quad D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right).$$

【1525】 $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$.

解 存在域: $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \leq 1$, 两端平方之, 解得 $x \leq 0$ 或 $x \geq \frac{2}{3}$.

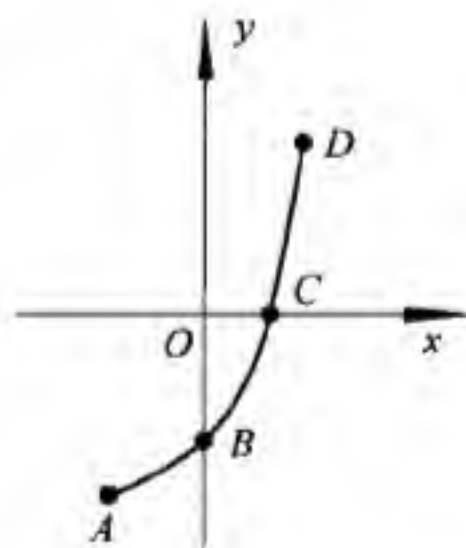


图 2.113

渐近线: $y = \frac{\pi}{3}$. 事实上, $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}$.

当 $x=0$ 时有边界的极小值 $y=0$. 当 $x=\frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y=\pi$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}}, \quad y'' = \begin{cases} \frac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2}(9x-12x^2-1), & x \leq 0, \\ \frac{1}{(3x^2-2x)^{\frac{3}{2}}(1-2x)^2}(12x^2-9x+1), & x \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

当 $x \leq 0$ 时, $y'' < 0$, 图像是凸的; 当 $x \geq \frac{2}{3}$ 时, $y'' > 0$, 图像是凹的.

又当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像下降; 当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像也下降;

$$y'_-(0) = -\infty, \quad y'_+\left(\frac{2}{3}\right) = -\infty.$$

图像如图 2.114 所示.

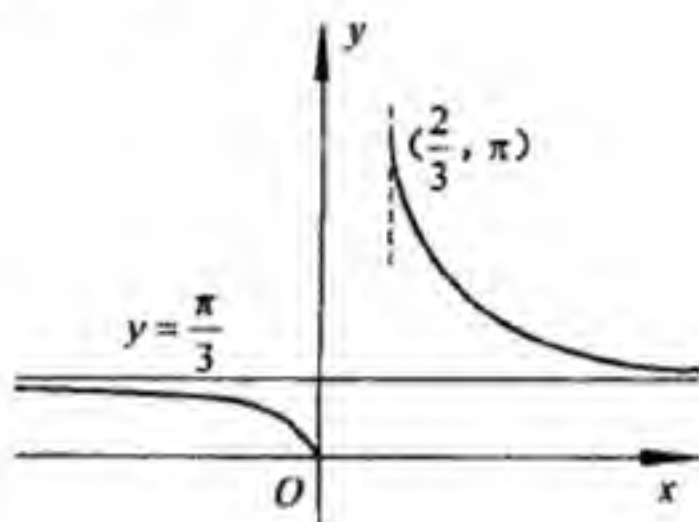


图 2.114

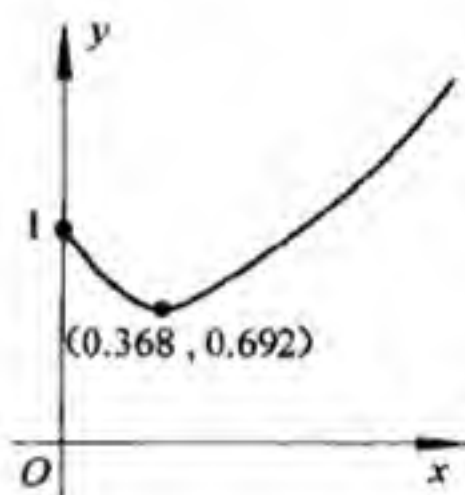


图 2.115

【1526】 $y = x^x$.

解 一般只讨论 $x > 0$. 函数值始终为正的, 故图像在 Ox 轴的上方.

$y' = x^x(1 + \ln x)$. 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$. 经判别知, 此时有极小值 $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692$.

$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0$, 图像是凹的. 当 $x \rightarrow +0$ 时有边界极大值 $y = 1$ (利用洛必达法则求得).

图像如图 2.115 所示.

【1527】 $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x > 0$.

渐近线: $y = 1$. 事实上, $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

当 $x \rightarrow +0$ 时有边界的极小值 $y = 0$.

$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$. 令 $y' = 0$ 得 $x = e$.

当 $x < e$ 时, $y' > 0$, 函数递增, 其图像上升;

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 函数递减, 其图像下降.

当 $x = e$ 时有极大值 $y = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$.

$y'' = x^{\frac{1}{x}-4}(1 - 2\ln x + \ln^2 x - 3x + 2x\ln x)$, 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx e^{1.47} (\approx 4.35)$.

当 $0 < x < e^{1.47}$ 时, $y'' < 0$, 图像是凸的.

当 $x > e^{1.47}$ 时, $y'' > 0$, 图像是凹的, 故 $x = e^{1.47}$ 是拐点, $y \approx 1.402$.

图像如图 2.116 所示. 图中各点位置: $A(e, 1.445)$, $B(4.35, 1.402)$.

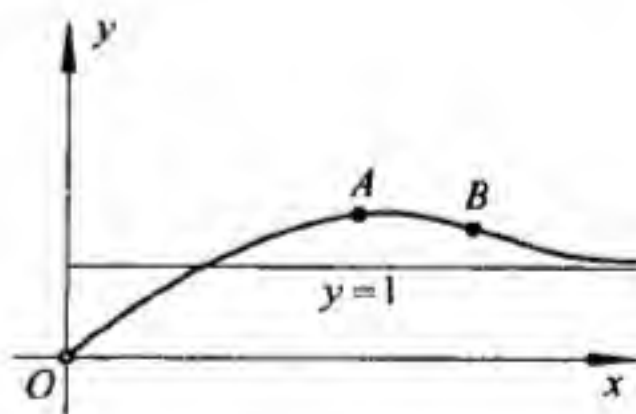


图 2.116

【1528】 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 存在域: $x > -1, x \neq 0$. 函数值为正的, 故图像在 Ox 轴上方.

$$y' = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left[\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \right],$$

易证 $\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0$, 故 $y' < 0$, 从而, 函数递减, 其图像下降.

渐近线: $x = -1$ 和 $y = 1$. 图像是凹的. $x = 0$ 为“可去”不连续点.

图像如图 2.117 所示.

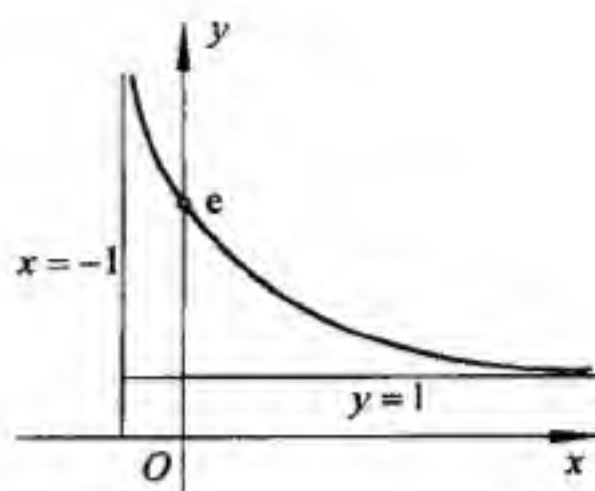


图 2.117

【1529】 $y = x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ($x > 0$).

解 $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + x \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right] > 0$,

易证 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0$ ($x > 0$), 故 $y' > 0$, 从而函数递增, 其图像上升.

当 $x \rightarrow +0$ 时, 有边界的极小值 $y = 0$.

渐近线: $y = e\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -e \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x+1} \right] = -\frac{e}{2}.$$

图像如图 2.118 所示.

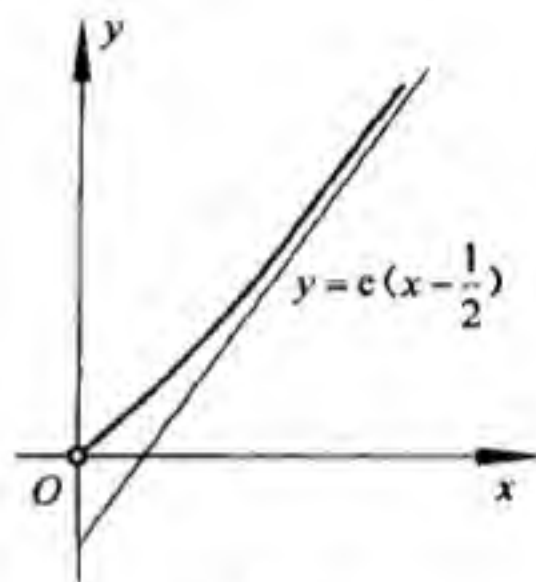


图 2.118

【1530】 $y = \frac{1}{e^{1-x^2} + x^2}$ (不研究凹凸性).

解 函数值始终为正的, 故图像在 Ox 轴的上方. 图像关于 Oy 轴对称.

不连续点: $x = 1$ 及 $x = -1$.

$y' = \frac{2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} (3-x^2)}{(1-x^2)^2 (1+x^2)^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{3}$. 经判别知:

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = e$;

当 $x = -\sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$;

当 $x = \sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$.

渐近线: $y = 0$; $x = -1$ 及 $x = 1$;

图像如图 2.119 所示. 图中主要点的坐标: $A(0, e)$, $B(\sqrt{3}, 0.15)$, $C(-\sqrt{3}, 0.15)$

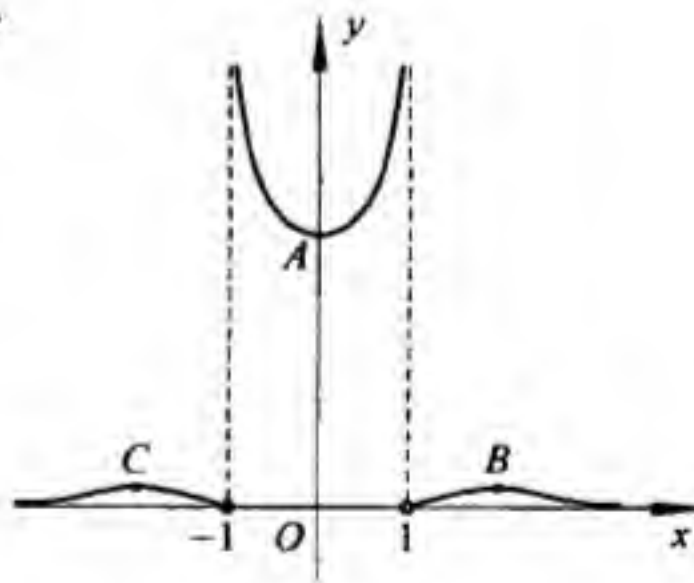


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线:

【1531】 $x = \frac{(t+1)^2}{4}$, $y = \frac{(t-1)^2}{4}$.

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程.

$$\sqrt{x} = \frac{|t+1|}{2}, \quad \sqrt{y} = \frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t \geq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}, \sqrt{y} = \frac{t-1}{2}$. 相减得

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \quad (x \geq 1, x > y); \quad (1)$$

当 $t \leq -1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}, \sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$. 因而,

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 \quad (y \geq 1, y > x); \quad (2)$$

当 $-1 \leq t \leq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}, \sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$. 相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1). \quad (3)$$

由方程(1),(2)及(3)即得所给曲线的图像. 图像关于 $y=x$ 对称,

如图 2.120 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(1,0), B(4,1), C(0,1), D(1,4), E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

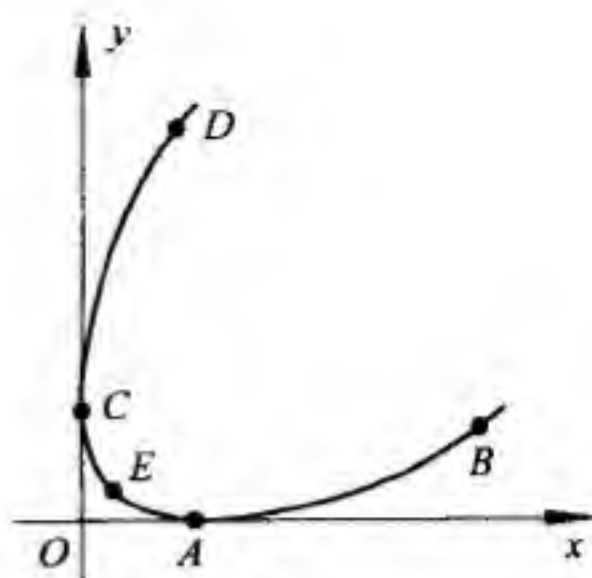


图 2.120

【1532】 $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3$.

解 $x'_t = 2(1-t), y'_t = 3(1-t^2)$. 令 $x'_t = 0, y'_t = 0$, 得 $t = \pm 1$.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1, 1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1, +\infty)$	-	-	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t) \quad (t \neq 1)$. 令 $\frac{dy}{dx} = 0$ 得 $t = -1$, 此时 $x = -3, y = -2$.

由于 $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$, 故存在域为 $x \leq 1$, 且图像有两支,

又因 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4(1-t)}$, 故当 $t > 1$ 时图像呈凸状, 而当 $t < 1$ 时图像呈凹状.

当 $x=0$ 时, $t=0$ 或 $t=2$, 此时 $y=0$ 或 $y=-2$

当 $y=0$ 时, $t=0, +\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$, 此时 $x=0, 0.464$ 或 -6.464 .

图像如图 2.121 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(-6.464, 0), B(-3, -2), D(1, 2), E(0, -2).$$

【1533】 $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}$.

解 $x'_t = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y'_t = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}$.

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值: $t=0, \pm 1$ 及 2 .

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, 1)$	-	-	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1, 2)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2, +\infty)$	+	-	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

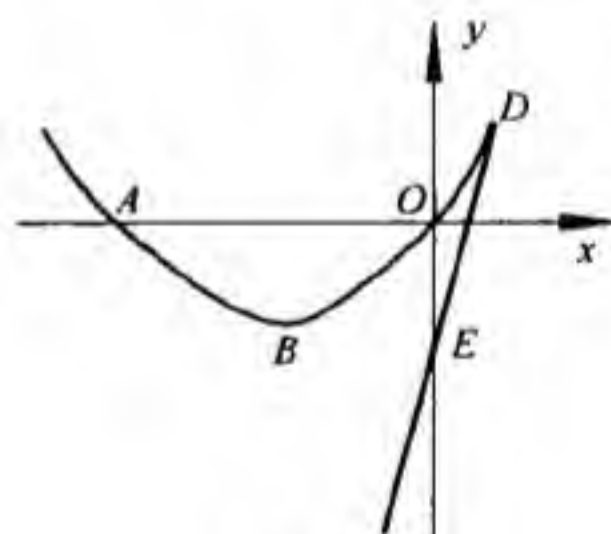


图 2.121

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2}$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 及 $(4, +\infty)$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 因而, 函数递减, 其图像下降.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}$, 令 $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ 得 $t \approx -0.33$, 经判别知, 此时对应于拐点 $(-0.08, 0.30)$.

令 $\frac{dx}{dy} = 0$ 得 $t = 0, 2$ 及 -1 , 其中当 $t = 0$ 及 2 时有垂直切线, 切点为 $(0, 0)$ 及 $(4, \frac{2}{3})$. 当 $t = -1$ 时 $x =$

$-\frac{1}{2}$, 此为垂直渐近线. 事实上, $\lim_{t \rightarrow -\frac{1}{2}} y = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{t}{t^2-1} = \infty$.

斜渐近线为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{x}{2} \right) = -\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+2)}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}.$$

又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 即当 $t \rightarrow 1+0$ 时, $y \rightarrow +\infty$ 或当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$;

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 即当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$ 或当 $t \rightarrow 1-0$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

总之, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ 或 0 , $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ 或 $-\infty$. 图像如图 2.122 所示. 图中主要点的坐标: $A(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$,

$B(4, \frac{2}{3})$.

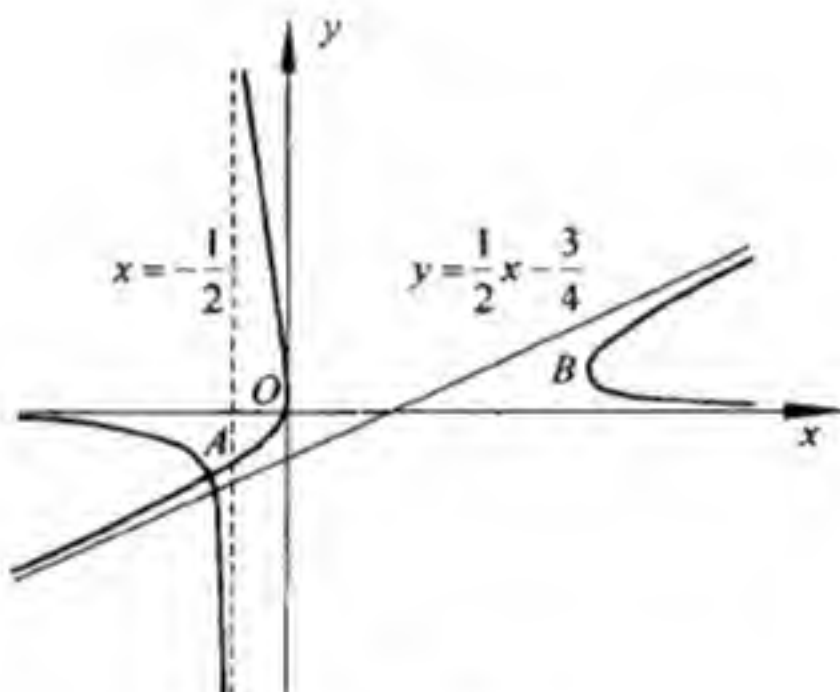


图 2.122

【1534】 $x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$.

解 由于以 $-t$ 换 t , x 及 y 值不变, 故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2 = \frac{x}{1+x}$, 故 $x \geq 0$ 或 $x \leq -1$.

$x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$, $y'_t = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$, $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 < 0$, 函数递减, 其图像下降.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^4}$, 当 $|t| < 1$ 时图像呈凹状, 当 $|t| > 1$ 时图像呈凸状.

考虑 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$, 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值: $t = 0, t = 1$.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(0, 1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到 $\frac{1}{2}$
$(1, +\infty)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 下降到 0

渐近线为 $y = \frac{1}{2}$. 事实上

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}.$$

在点 $(-1, 0)$ 处 $(t = +\infty)$, $\frac{dy}{dx} = -1$, 而在点 $(0, 1)$ 处 $(t = 0)$ 仍有

$\frac{dy}{dx} = -1$. 这说明在这两点处的切线均与 Ox 轴成 135° 的角. 这

两点且为边界极值点.

图像如图 2.123 所示.

【1535】 $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

解 $x'_t = \frac{e^t - 1}{e^t}$, $y'_t = \frac{2(e^{2t} - 1)}{e^{2t}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2(e^t + 1)}{e^t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{e^t - 1}$.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图像
$(-\infty, 0)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 1	由 $+\infty$ 下降到 1	+	+	上升, 凹状
$(0, +\infty)$	+	+	由 1 上升到 $+\infty$	由 1 上升到 $+\infty$	+	-	上升, 凸状

渐近线: $y = 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - 2x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} [(2t + e^{-2t}) - 2t - 2e^{-t}] = 0.$$

当 $t = 0$ 时, 对应于曲线上的点 $A(1, 1)$, 此点的导数 $\frac{dy}{dx} = 4$. 当 $t = -\ln 2$ 时,

曲线与渐近线相交. 图像如图 2.124 所示.

【1536】 $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$ ($a > 0$).

解 由于 $a \cos 2(t + 2\pi) = a \cos 2t$ 及 $a \cos 3(t + 2\pi) = a \cos 3t$.

因此, 我们只须考虑 t 在 $(0, 2\pi)$ 内变化时, x 及 y 的变化情况.

$$x'_t = -2a \sin 2t, \quad y'_t = -3a \sin 3t, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin 3t}{2 \sin 2t}.$$

考虑 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$ 的值: $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$, 及 2π .

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图像
$(0, \frac{\pi}{3})$	-	-	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 a 下降到 $-a$	+	上升
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	-	+	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 0	-	下降
$(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$	+	+	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 上升到 a	+	上升
$(\frac{2\pi}{3}, \pi)$	+	-	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 a 下降到 $-a$	-	下降
$(\pi, \frac{4\pi}{3})$	-	+	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 a	-	下降
$(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$	-	-	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 a 下降到 0	+	上升
$(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3})$	+	-	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 下降到 $-a$	-	下降
$(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$	+	+	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 $-a$ 上升到 a	+	上升

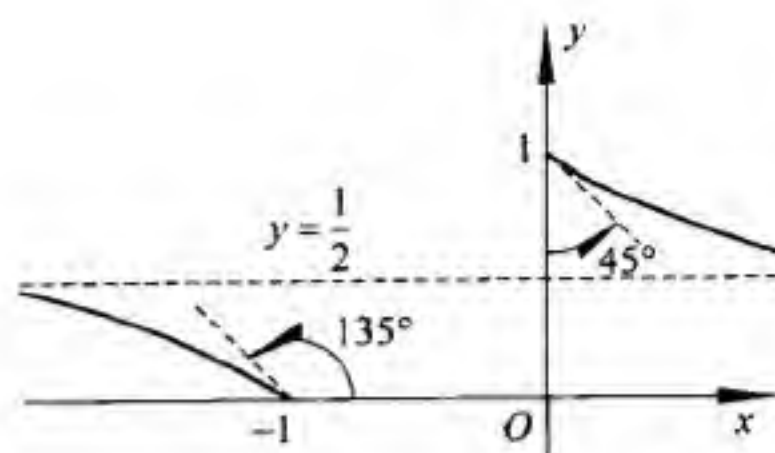


图 2.123

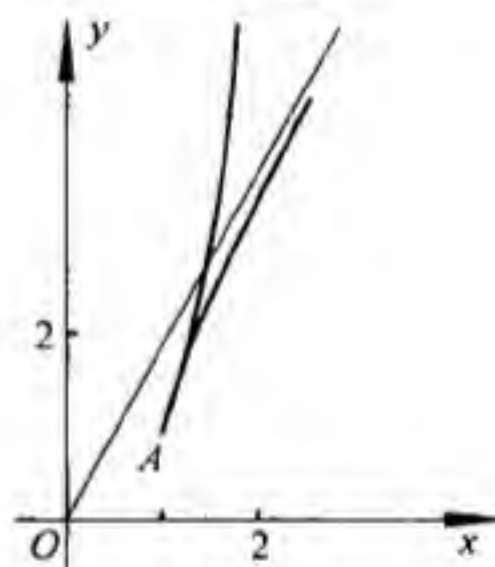


图 2.124

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = -a$;

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = \infty$ (t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = -\infty$; 从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = +\infty$), 此时 $x = -a$, $y = 0$;

当 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = a$;

当 $t = \pi$ 时, 利用洛必达法则可求得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$, 此时 $x = a$, $y = -a$;

当 $t = 0$ 时, 利用洛必达法则可求得 $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}$, 此时 $x = y = a$.

图像如图 2.125 所示.

图中主要点的坐标:

$$\begin{aligned} A(a, a), & \quad B\left(\frac{a}{2}, 0\right), & C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right), & D\left(-\frac{a}{2}, -a\right), \\ E(-a, 0), & F\left(-\frac{a}{2}, a\right), & G\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right), & H(a, -a). \end{aligned}$$

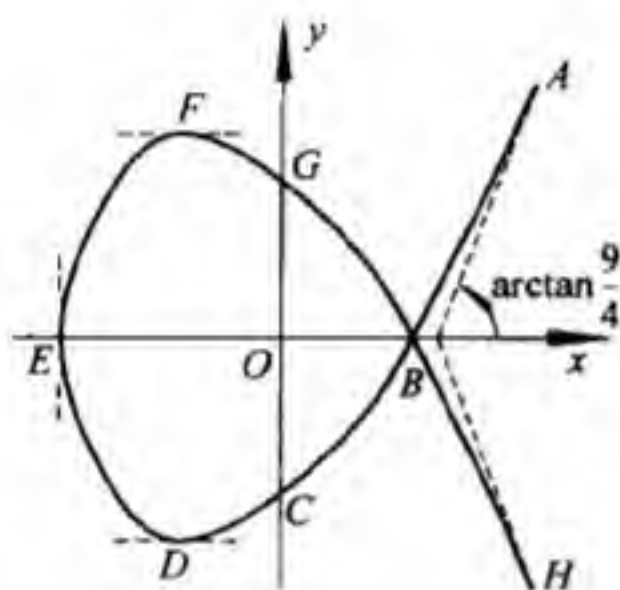


图 2.125

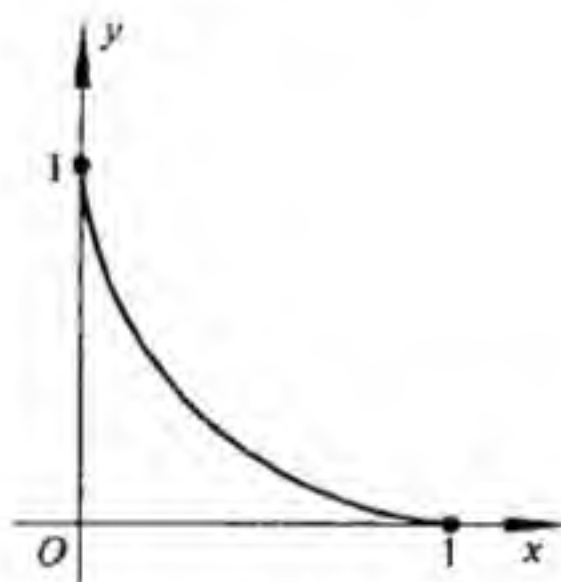


图 2.126

【1537】 $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

解 $\sqrt{x} = \cos^2 t$, $\sqrt{y} = \sin^2 t$, 相加即得 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. 图像如图 2.126 所示*).

*) 参看 1531 题.

【1538】 $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

解 当 $t > 0$ 时, x 及 y 才有意义.

当 $0 < t \leq 1$ 时, 令 $t' = \frac{1}{t}$, 则 $t' \geq 1$, 且 $x = -\frac{\ln t'}{t'}$, $y = -t' \ln t'$, 所以, 图像关于直线 $x + y = 0$ 对称.

以下讨论图像的极值点, 凹凸性及拐点, 不妨设 $t \geq 1$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \ln^2 t - 4}{t^3(1 + \ln t)^2}.$$

令 $1 - \ln t = 0$, 得 $t = e$. 经判别知, 此时图像有极大值点: $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

令 $\ln^2 t - 2 = 0$, 得 $t = e^{\sqrt{2}}$, 相应的点 $B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ 为图像的拐点.

当 $1 \leq t \leq e^{\sqrt{2}}$, 即当 $0 \leq x \leq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时, 图像呈凸状. 当 $t \geq e^{\sqrt{2}}$, 即当 $x \geq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时, 图像呈凹状.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图像
$(0, \frac{1}{e})$	-	+	由 0 下降到 $-\frac{1}{e}$	由 $-\infty$ 上升到 $-e$	-	下降
$(\frac{1}{e}, e)$	+	+	由 $-\frac{1}{e}$ 上升到 e	由 $-e$ 上升到 $\frac{1}{e}$	+	上升
$(e, +\infty)$	+	-	由 e 上升到 $+\infty$	由 $\frac{1}{e}$ 下降到 0	-	下降

曲线通过点 $(0,0)$, 在此点切线的倾角为 45° .

水平渐近线为 $y=0$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

垂直渐近线为 $x=0$. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t} = -\infty.$$

图像如图 2.127 所示.

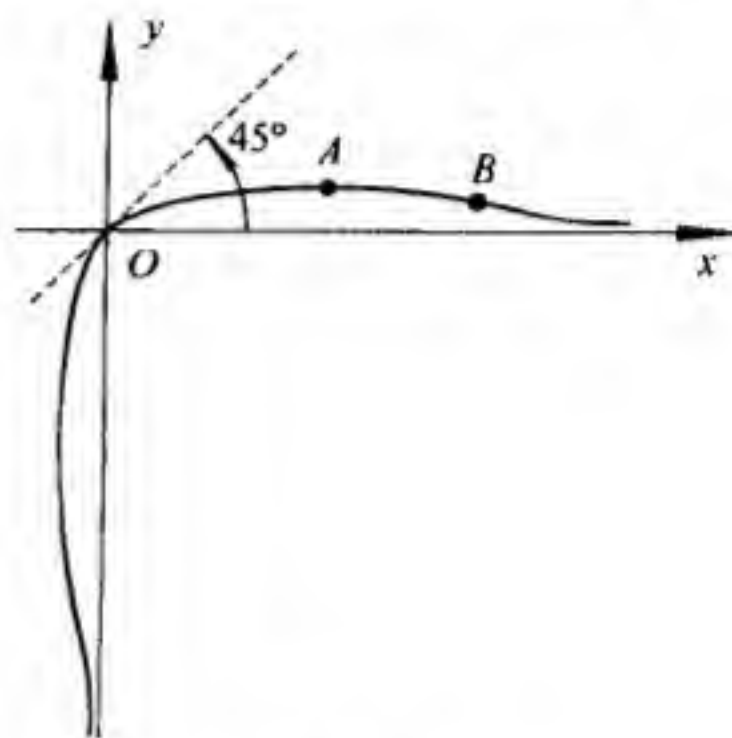


图 2.127

【1539】 $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = a \tan^3 t$ ($a > 0$).

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程: $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

显然, $|x| \geq a$ 且图像对于两坐标轴都对称, 故只须考虑在第一象限部分的函数图像. 由于

$$y' = x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}, \quad y'' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} (y^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}).$$

而当 $x > 0, y > 0$ 时, 有 $x > y$. 从而有 $y' > 0, y'' > 0$, 故图像上升且呈凹状.

在 $(a, 0)$ 点的切线的倾角为 0° .

图像如图 2.128 所示.

【1540】 $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ ($a > 0$).

解 当 t 用 $-t$ 换时, x 的大小不变符号相反, 而 y 却不变, 故图像对于 Oy 轴对称.

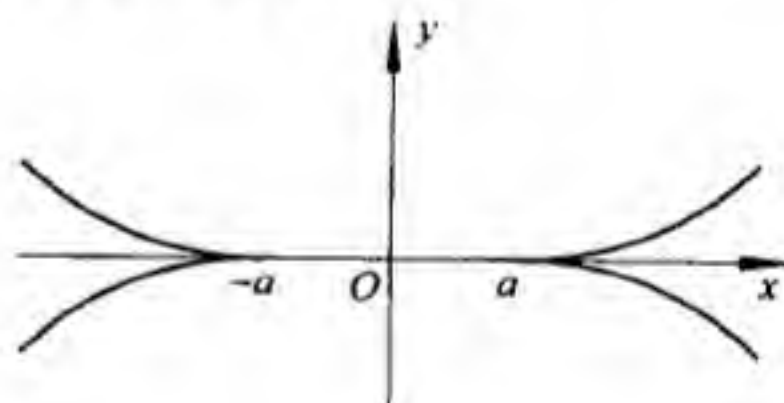


图 2.128

$$x'_t = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad y'_t = a \operatorname{sh} t, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{4e^{2t}}{a(e^t - 1)^4}.$$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$	图像
$(-\infty, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	-	-	下降
$(0, +\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	-	上升

当 $t \rightarrow -0$ 时, $x \rightarrow -0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty$;

当 $t \rightarrow +0$ 时, $x \rightarrow +0, \frac{dy}{dx} \rightarrow +\infty$. 因此, 在 $(0,0)$ 点的切线垂直于 Ox 轴.

图像如图 2.129 所示.

把下列曲线方程化为参数方程, 然后作出这些曲线的图像:

【1541】 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).

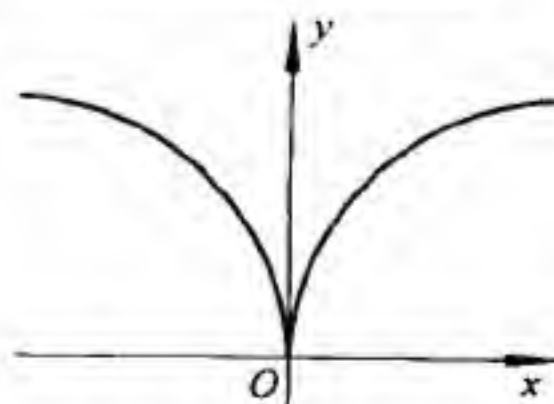


图 2.129

解 设 $y=tx$, 代入方程, 并消去 x^2 , 即得 $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

$$\text{由于 } x'_t = \frac{6a(\frac{1}{2}-t^3)}{(1+t^3)^2}, y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑 $x'_t=0$, $y'_t=0$, 及 x'_t, y'_t 趋于无穷的 t 值: $t=-1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 及 $\sqrt[3]{2}$.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	-	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	-	-	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{2(\frac{1}{2}-t^3)}, \text{ 当 } t=0 \text{ 时, } x=0, y=0, \frac{dy}{dx}=0; \text{ 当 } t \rightarrow +\infty \text{ 时, } x=0, y=0, \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(2-t^3)}{2(\frac{1}{2}-t^3)} = \infty.$$

这说明, 坐标原点是曲线的二重点. 曲线的一支与 Ox 轴相切, 一支与 Oy 轴相切.

渐近线: $x+y+a=0$. 事实上,

$$k = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{t \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{3at^2 + 3at}{1+t^3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{6at + 3a}{3t^2} = -a.$$

图像如图 2.130 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}), B(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a), C(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}).$$

【1542】 $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称, 同时关于直线 $y=x$ 对称.

$$\text{设 } x=ty, \text{ 则当 } y \neq 0 \text{ 时, 得 } y = \pm \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}.$$

根据对称性, 不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x = t\sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}, \\ y = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}}. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

由于 $0 \leq x \leq 1, x \leq y$, 故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y=x$ 之间, 由此根据对称性即可作出全部图像. 当 t 由 0 连续变到 1 时, 曲线上的点 $(0,1)$ 连续变化到点 $(1,1)$. 由于

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} + \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} \cdot \frac{t^2(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^4+1}} \cdot \frac{t(1-2t^2-t^4)}{(t^4+1)^2}.$$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = 0, \text{ 得 } t=0, \sqrt{\sqrt{2}-1}. \text{ 相应地, 有 } x=0, y=1; x=\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71, y \approx 1.10.$$

经判别知, 当 $x=0$ 时 y 取得极小值; 当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, y 取得极大值. 类似地, 当 $y=0$ 时, x 取得极小值 $x=1$; 当

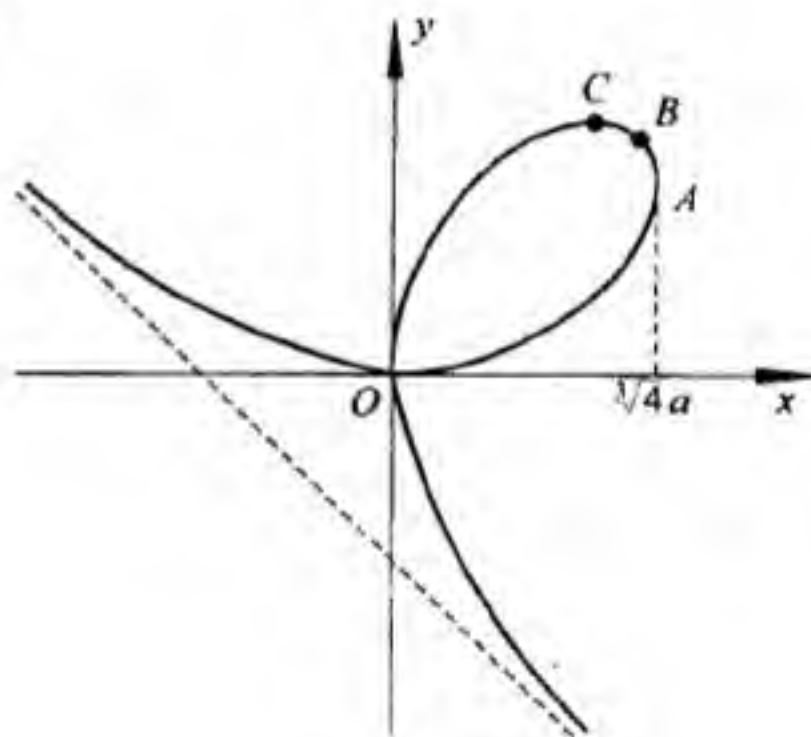


图 2.130

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, x 取得极大值 $x \approx 1.10$.

由对称性即得知: 当 $x=0$ 时, 有极小值 $|y|=1$; 当 $|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有极大值 $|y| \approx 1.10$; 当 $y=0$ 时有极小值 $|x|=1$; 当 $|y| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 有极大值 $|x| \approx 1.10$.

值得注意的是, 当 $t=1$ 时即在点 $(1,1)$ 处, $\frac{dy}{dx} = -1$, 因而, 曲线在点 $(1,1)$ 光滑连接.

原点 $(0,0)$ 是一个孤立点, 再计算几点的坐标 $(0 \leq t \leq 1)$:

作下表:

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{2}-1$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为 $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ 及 $(0,-1)$.

如图 2.131 所示.

【1543】 $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

解 设 $y=tx$, 代入原方程, 即得

$$x = \frac{1-t^3}{t^2}, \quad y = \frac{1-t^3}{t} \quad (t \neq 0), \quad x'_t = -\frac{2+t^3}{t^3}, \quad y'_t = -\frac{1+2t^3}{t^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2t^3}.$$

令 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ , 得 $t = -\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0$.

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图像
$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	-	+	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	-	下降
$(-\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 上升到 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	+	上升
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$	+	-	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 下降到 $-\infty$	-	下降
$(0, +\infty)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	+	上升

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\sqrt[3]{2}} = \infty, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = 0, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1.$$

图像通过点 $A(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}})$, $B(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}})$, 及 $O(0,0)$. 如图 2.132 所示.

【1544】 $x^y = y^x \quad (x > 0, y > 0)$.

解 由方程显见直线 $y=x$ 是图像的一部分. 对于 $y \neq x$ 的部分, 图像显然关于直线 $y=x$ 对称.

设 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$, 则 $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$, 即当 $x \neq y$ 时, 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \\ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

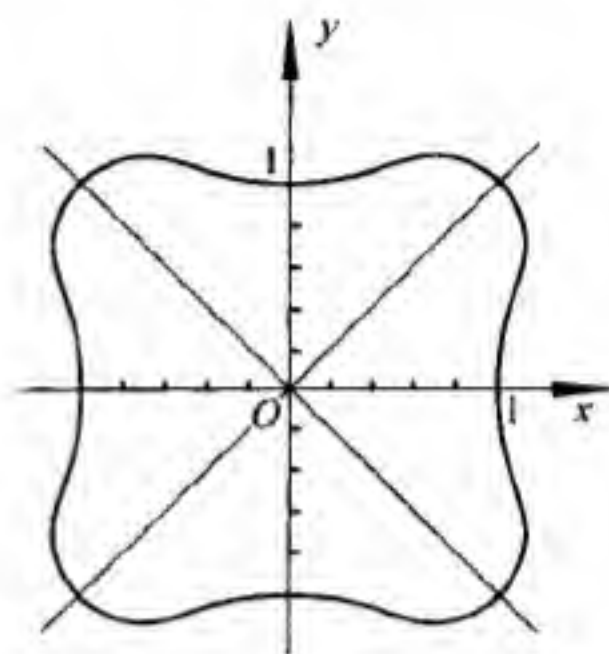


图 2.131

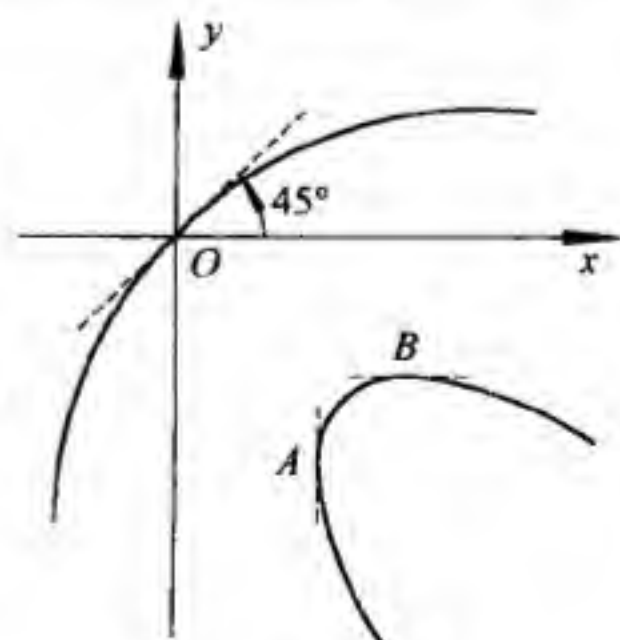


图 2.132

由条件 $x>0, y>0$ 知, t 满足 $-1<t<+\infty$, 由于

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow -1+0} y = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

故直线 $x=1$ 和 $y=1$ 是曲线的渐近线. 又因 $\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} y = e$, 故点 (e, e) 是曲线上的二重点. 由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \left[\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right], \quad \frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \left[\frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} \right],$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 + \frac{t^2}{t - (1+t)\ln(1+t)} \right].$$

容易证明: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1$. 并且当 $t \in (0, +\infty)$, 从而 $x \in (1, e)$ 时, 恒有 $\frac{dy}{dx} < 0$. 事实上, 设

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t],$$

则 $g(0) = 0$, 并且容易证明

$$g'(t) = 2t - \ln(1+t) > 0, \quad (1+t)\ln(1+t) - t > 0.$$

从而, 有 $g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t] > 0$, 即 $\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} > 1$.

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 - \frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} \right] < 0.$$

由对称性知, 对于 $t \in (-1, 0)$, 也有 $\frac{dy}{dx} < 0$. 而当 $t=0$ 时, 有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

所以, 图像始终是下降的, 并呈凹状, 无极值和拐点. 对应于 t 的变化范围 0 至 1 .

计算几点坐标如下:

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t \rightarrow -1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x \rightarrow +\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y \rightarrow 1$

综上所述, 曲线的图像由两部分组成, 一部分是直线, 另一部分是对称于直线 $y=x$ 的曲线 (图 2.133).

【1545】 作出曲线 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$ 的图像.

解 显见曲线的图像关于两坐标轴是对称的, 故只须在第一象限 $x \geq 0, y \geq 0$ 范围内进行讨论. 考虑渐近线

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \left(\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} \operatorname{ch} x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 x + 1}{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1. \end{aligned}$$

为求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x)$, 令

$$u = y - x = \ln(\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}) - x.$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x + \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1})}{e^x \sqrt{\operatorname{sh}^2 x - 1}} = 1,$$

所以, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y-x) = 0$. 因此, 直线 $y=x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y=0$ 时 $\operatorname{ch} y$ 取最小值 $\operatorname{ch} y = 1$, 所以, x 必须满足 $\operatorname{ch}^2 x \geq 2$ 或 $|x| \geq \ln(1+\sqrt{2}) \approx 0.88$, 并且当 $y=0$ 时, $|x| = \ln(1+\sqrt{2})$.

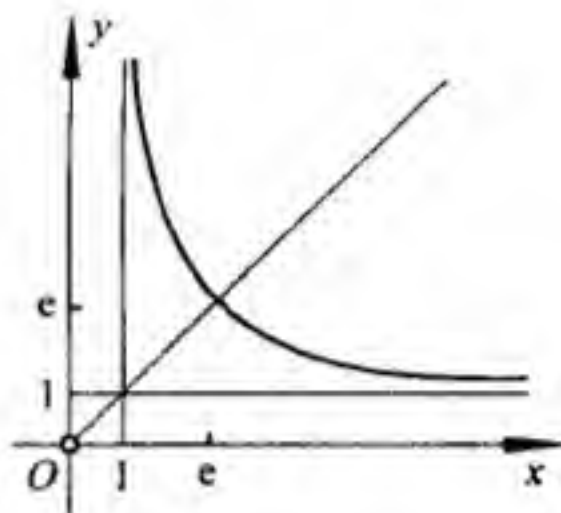


图 2.133

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y)(\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y) = 1,$$

从而令

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = t, \quad \text{即} \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \frac{1}{t}.$$

所以, 对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \\ \operatorname{ch} y = \frac{\frac{1}{t} - t}{2}, \end{cases} \quad (0 < t \leq \sqrt{2} - 1).$$

由原方程知

$$2\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x - 2\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y \cdot y' = 0 \quad \text{或} \quad y' = \frac{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y} > 0.$$

因而, 图像是上升的.

$$\begin{aligned} \text{又由于} \quad y'' &= \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \cdot y' \cdot \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^2} \\ &= \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} x)^4}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} &(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{sh}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\ &= \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) = (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) (\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) \\ &= -(\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) < 0. \end{aligned}$$

于是, $y'' < 0$ 恒成立. 所以, 曲线呈凸状.

计算几点的坐标如下:

t	$\sqrt{2}-1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t \rightarrow 0$
x	$\ln(1+\sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x \rightarrow +\infty$
y	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y \rightarrow +\infty$

曲线形状如图 2.134 所示.

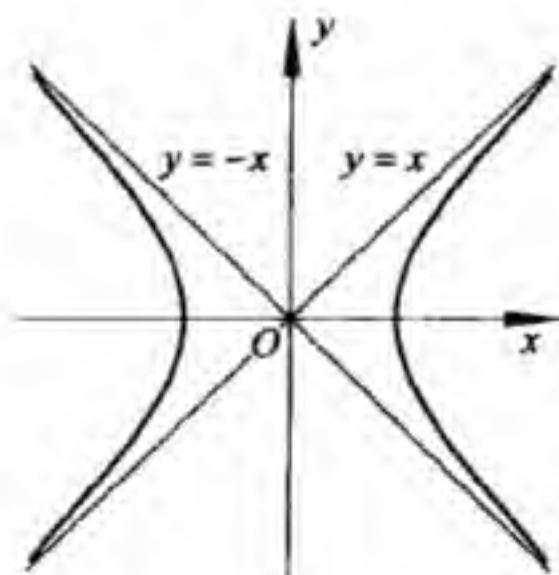


图 2.134

作出下列用极坐标 $(\varphi, r) (r \geq 0)$ 表示的函数的图像:

【1546】 $r = a + b \cos \varphi \quad (0 < a \leq b).$

解 当 $a = b$ 时, $r = a(1 + \cos \varphi)$, 这就是心脏线, 如图 2.135 所示.

当 $0 < a < b$ 时, 其几何轨迹叫做蚱线, 由于 $r(-\varphi) = r(\varphi)$, 故图像关于极轴对称.

由于当 $r \geq 0$ 时, $|\varphi| \leq \alpha = \arccos(-\frac{a}{b})$, 故当 $\varphi = 0$ 时 r 有极大值 $r = a + b$; 当 $\varphi = \pm \alpha$ 时 r 有边界的极

小值 $r=0$. 又由于 $r' = -b\sin\varphi < 0$, 故当 φ 由 0 变到 α 时, r 由 $a+b$ 变到 0.

当 $r < 0$ 时, $\alpha < |\varphi| \leq \pi$, 仿照上述讨论, r 由 0 下降到 $a-b$.

极点 O 为二重点, 如图 2.136 所示. 如果不考虑 $r < 0$, 则极点 O 不是二重点.

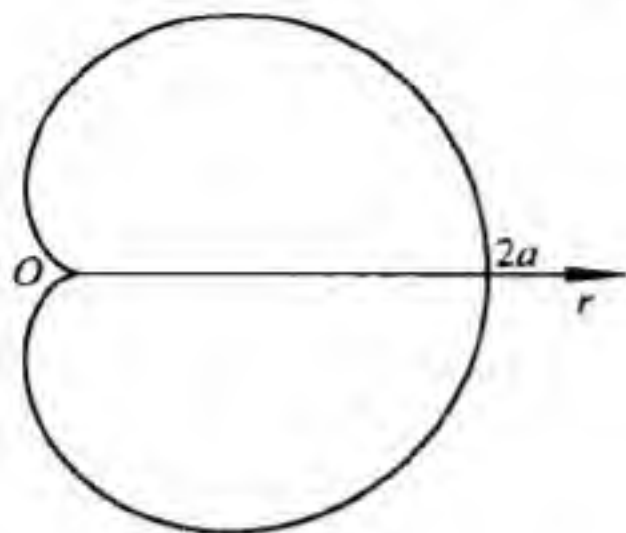


图 2.135

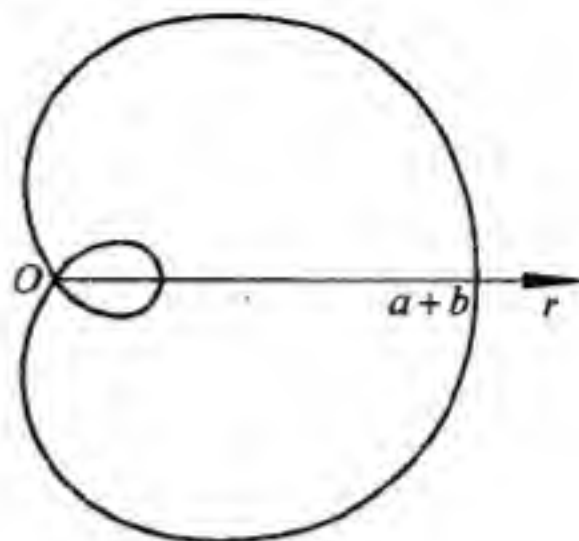


图 2.136

【1547】 $r = a\sin 3\varphi$ ($a > 0$).

解 由于 $r(\varphi + \frac{2\pi}{3}) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数. 函数的存在域为:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \quad \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

为此, 只要讨论 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 即可.

$$r' = 3a\cos 3\varphi \begin{cases} > 0, & \varphi \in (0, \frac{\pi}{6}), \\ < 0, & \varphi \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}), \end{cases}$$

故当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时 r 有极大值 $r = a$; 当 $\varphi = 0$ 及 $\frac{\pi}{3}$ 时, r 有极小值 $r = 0$. 射线

$\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ 及 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为图像的三对称轴.

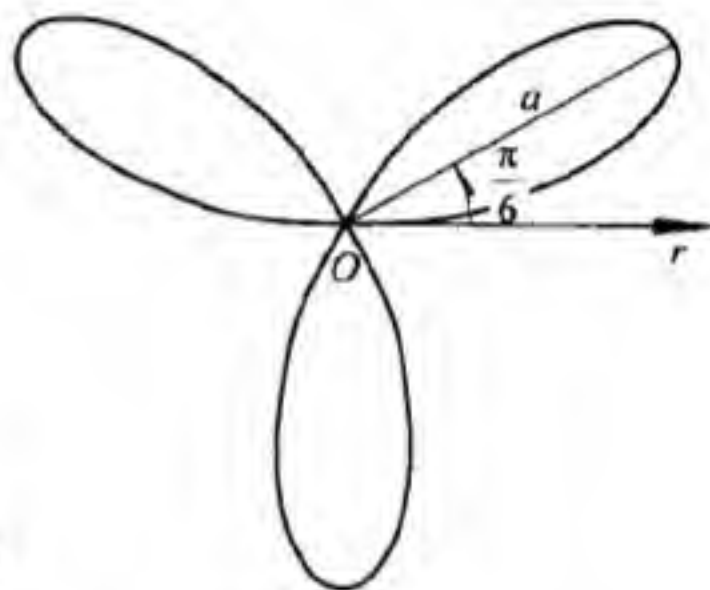


图 2.137

曲线在点 O 自交且为三重点, 整个图像有三个形状相同的瓣. 如图 2.137 所示.

【1548】 $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ ($a > 0$).

解 由于 $r(\varphi + \frac{2\pi}{3}) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数. 显然图像关于极轴对称.

函数的存在域为: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ 及 $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}$. 为此只要讨论 $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ 即可.

$$r' = \frac{3a\sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} < 0, & \varphi \in (-\frac{\pi}{6}, 0), \\ > 0, & \varphi \in (0, \frac{\pi}{6}), \end{cases}$$

故当 $\varphi = 0$ 时有极小值 $r = a$. 当 φ 由 0 单调地增大到 $\frac{\pi}{6}$ 时, r 由 a 单调地增大到 $+\infty$, 在这种意义上, $\varphi = \frac{\pi}{6}$

为曲线的渐近线. 同样地 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 也为渐近线.

由周期性可知, 当 $\varphi = \pm \frac{2\pi}{3}$ 时有极小值 $r = a$. $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ 及 $\varphi = \pm \frac{5\pi}{6}$ 均为曲线的渐近线.

最后, 还要研究在点 $(a, 0)$ 附近的状况. 为此, 只要考虑在该点切线的斜率:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi},$$

再以 $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{3a\sin 3\varphi}{2(\cos 3\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ 代入上式, 即得

$$\tan \alpha = \frac{3a\sin 3\varphi \sin \varphi + 2a\cos \varphi \cos 3\varphi}{3a\sin 3\varphi \cos \varphi - 2a\sin \varphi \cos 3\varphi}.$$

于是, $\tan \alpha \Big|_{\varphi=0} = \infty$, 即在 $(a, 0)$ 点曲线的切线垂直于极轴.

如图 2.138 所示.

【1549】 $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$, 其中 $\varphi > 1$ ($a > 0$).

解 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1} r = \lim_{\varphi \rightarrow 1} \frac{a \operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = +\infty, \quad \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a \operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \varphi} = 0,$$

从而, 曲线以 $\varphi = 1$ 为渐近线, 以极点为渐近点. 又

$$\frac{dr}{d\varphi} = a \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}(\varphi - 1) - \operatorname{th} \varphi}{(\varphi - 1)^2} = a \cdot \frac{(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi}{(\varphi - 1)^2 \operatorname{ch}^2 \varphi},$$

当 $1 < \varphi < +\infty$ 时恒有 $(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi < 0$. 事实上, 令 $y(\varphi) = (\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi$, 则 $y(1) = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 < 0$, 而 $y'(\varphi) = 1 - \operatorname{ch} 2\varphi < 0$, 故有 $y(\varphi) \leq y(1) < 0$. 这就证明了当 $1 < \varphi < +\infty$ 时恒有 $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, 即当 φ 增大时 r 单调减小.

为考察当 $r \rightarrow +\infty$ 时曲线的变化趋势, 令

$$y_1 = x \tan 1, \quad y_2 = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi.$$

由于

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - x \tan 1 = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \tan 1 \\ &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \tan 1 = a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\tan \varphi - \tan 1}{\varphi - 1}, \end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1} (y_2 - y_1) = \lim_{\varphi \rightarrow 1} a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\tan \varphi - \tan 1}{\varphi - 1} = \frac{a \operatorname{th} 1}{\cos 1}.$$

于是, 在直角坐标系下, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线 $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$ 以直线 $y = x \tan 1 + a \frac{\operatorname{th} 1}{\cos 1}$ 为渐近线.

计算几点的坐标如下表:

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi \rightarrow +\infty$
r	4.15a	2.20a	1.59a	1.53a	1.17a	0.96a	0.65a	0.46a	0.24a	0.21a	0.18a	0.11a	$r \rightarrow 0$

综上所述, 曲线是螺状线, 如图 2.139 所示.

【1550】 $\cos \varphi = \frac{r-1}{r^2}$.

解 由方程容易判定, 曲线关于极轴对称. 因而只需在 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 范围内研究图像. 方程可化为

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cos \varphi}}{2\cos \varphi}.$$

由于必有 $1 - 4\cos \varphi \geq 0$, 故角的最小值应为 $\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx 75^\circ 30'$, 对应的 $r = 2$. 由 $r > 0$ 知曲线方程为

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos \varphi}}{2\cos \varphi} \quad \left(\arccos \frac{1}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right); \quad (1)$$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos \varphi}}{2\cos \varphi} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \right). \quad (2)$$

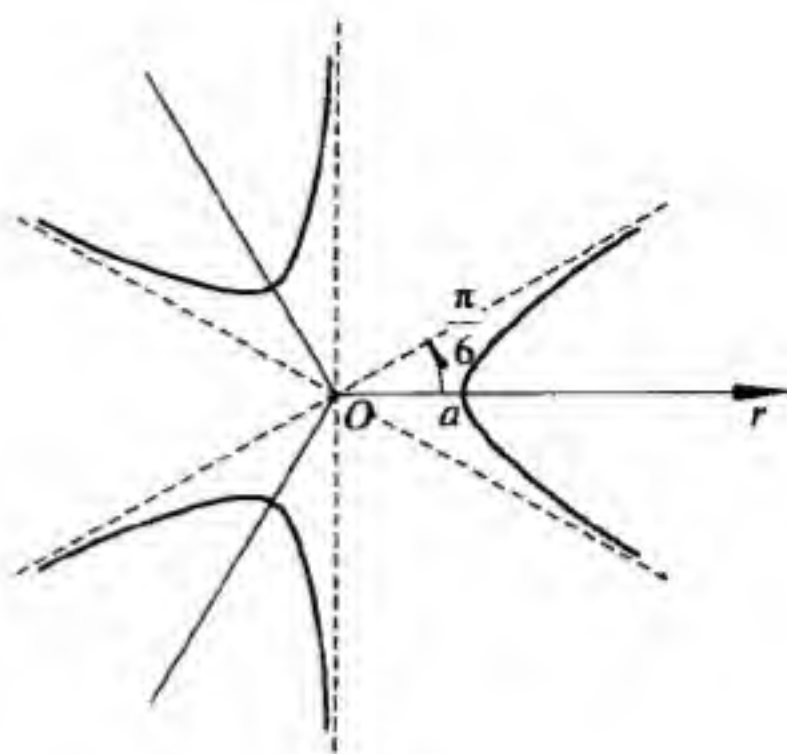


图 2.138

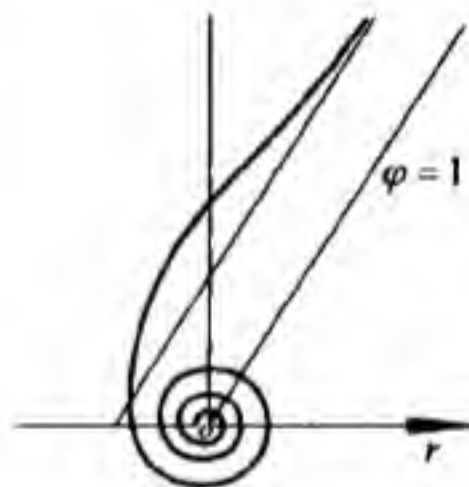


图 2.139

首先研究方程(1)所表示的曲线的图像. 因为随着 φ 增加, $2\cos\varphi$ 减小, $\sqrt{1-4\cos\varphi}$ 增大, 因而 r 随 φ 增加而单调增加. 事实上, 易证 $\frac{dr}{d\varphi} > 0$. 又

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 + \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = +\infty,$$

所以, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时有渐近线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$, 得 $x = \frac{r-1}{r}$, 故当 $r \rightarrow +\infty$ 时 $x \rightarrow 1$, 即当 $r \rightarrow +\infty$ 时,

曲线与直线 $r = \frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近 (直角坐标系下 $x=1$ 为渐近线).

下面研究拐点. 由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr} = \frac{r^2 - 2r(r-1)}{r^4} = \frac{2-r}{r^3}, \quad -\sin\varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2-r}{r^3}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3}{r-2} \sin\varphi,$$

从而,

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\varphi^2} &= \frac{3r^2(r-2)-r^3}{(r-2)^2} \frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi = \frac{r^3(2r^3-6r^2)}{(r-2)^3} \sin^2\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi \\ &= \frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3} \left[1 - \frac{(r-1)^2}{r^4} \right] + \frac{r^3}{r-2} \cdot \frac{r-1}{r^2} \\ &= \frac{r\{(2r-6)[r^4 - (r-1)^2] + (r-2)^2(r-1)\}}{(r-2)^3}. \end{aligned}$$

由 $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$ 得 $2r^4 - 3r^2 + 8r - 6 = 0$, 经判别知: 拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 - \sqrt{1-4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = 1,$$

事实上, 由 $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$ 也可得: 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $r=1$. 因而点 $(1, \frac{\pi}{2})$ 是曲线上的点. 又

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{1}{(2\cos\varphi)^2} [(1-4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} (-2\sin\varphi)(2\cos\varphi) + 2\sin\varphi(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})] \\ &= \frac{2\sin\varphi[(1-\sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi} - 2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2 \sqrt{1-4\cos\varphi}} = \frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi} - (1-2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2 \sqrt{1-4\cos\varphi}}. \end{aligned} \quad (3)$$

容易证明: $f(\varphi) = \sqrt{1-4\cos\varphi} - (1-2\cos\varphi) < 0$. 事实上, 有

$$f'(\varphi) = 2\sin\varphi \left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}} - 1 \right) < 0 \quad \text{且} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

又因当 $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, (3) 的其它因子均为正, 故得 $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, 即 r 随 φ 的增加而单调下降, 并且当 $\varphi = \pi$ 时达到极小值

$$r = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

事实上, $\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi = \pi$ 从负变到正.

计算几点的坐标列表如下:

φ	$75^\circ 30'$	$76^\circ 5'$	$77^\circ 10'$	81°	84°	87°	$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r \rightarrow +\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示.

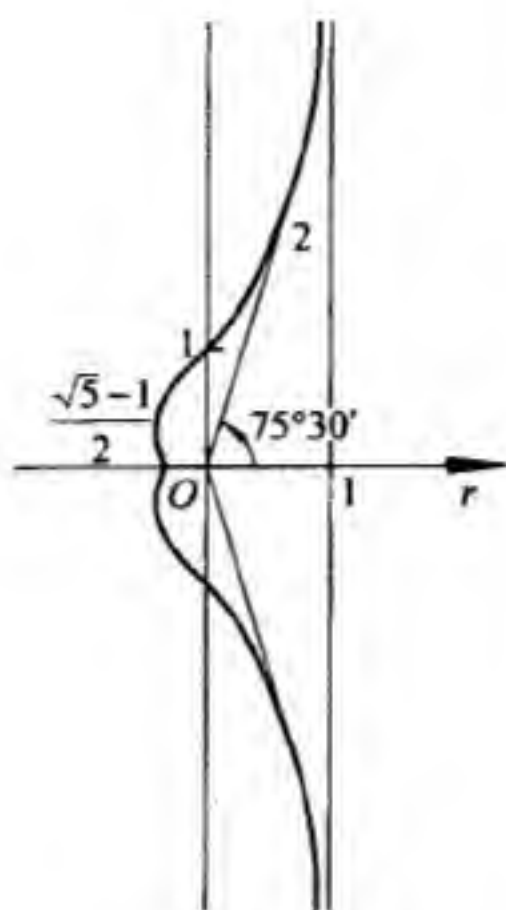


图 2.140

作出下列曲线族的图像(a 表参变量):

【1551】 $y = x^2 - 2x + a$.

提示 将方程变形后作平移, 并就 $a > 1$, $a = 1$ 及 $a < 1$ 讨论抛物线顶点的位置.

解 将方程变形: $y - (a - 1) = (x - 1)^2$. 作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + (a - 1), \end{cases}$$

即得标准方程 $y' = x'^2$, 此为呈凹状的抛物线.

当 $a > 1$ 时, 抛物线的顶点位于第一象限; 当 $a < 1$ 时, 抛物线的顶点位于第四象限; 当 $a = 1$ 时, 抛物线的顶点在 $(1, 0)$. 不论 a 为何值, 此抛物线的顶点位于直线 $x = 1$ 上. 如图 2.141 所示.

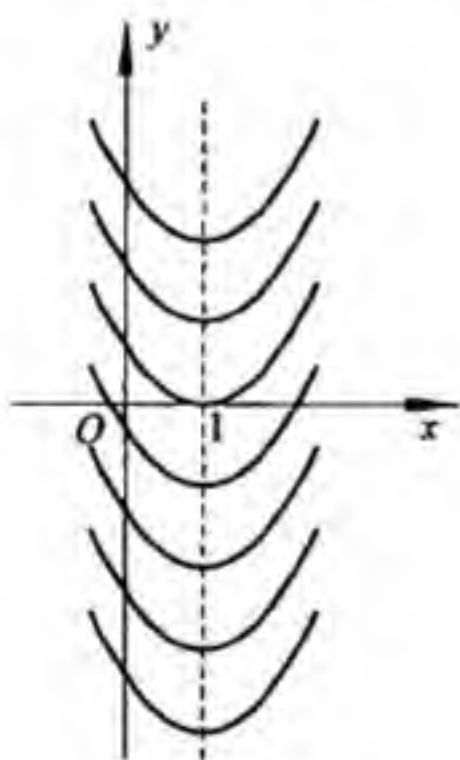


图 2.141

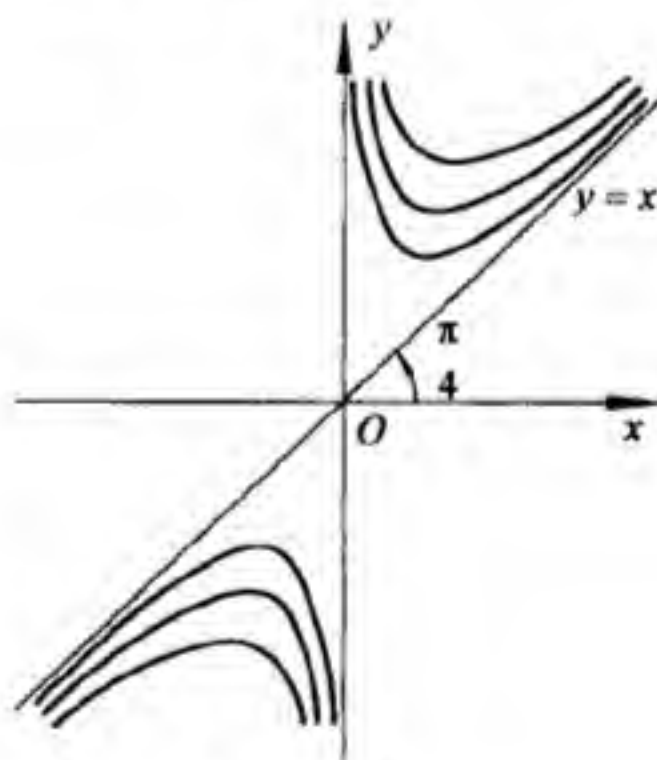


图 2.142

【1552】 $y = x + \frac{a^2}{x}$.

解 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$.

当 $a \neq 0$ 时为双曲线族, 其图像可由 $y = x$ 和 $y = \frac{a^2}{x}$ 相加而成, 它们均以直线 $y = x$ 和 $x = 0$ 为渐近线.

当 $x = |a|$ 时, 有极小值 $y = 2|a|$; 当 $x = -|a|$ ($a \neq 0$) 时, 有极大值 $y = -2|a|$.

如图 2.142 所示.

【1553】 $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y - x = \pm \sqrt{a(1-x^2)}$, 即 $(y-x)^2 + ax^2 = a$.

作仿射变换 $\begin{cases} \xi_1 = -x+y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$ 则原方程变形为 $\xi_1^2 + a\xi_2^2 = a$.

当 $0 < a < +\infty$ 时为椭圆族; 当 $-\infty < a < 0$ 时为双曲线族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 全族曲线均通过点 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$.

$y' = 1 \mp \frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}$, 令 $y' = 0$, 得 $x^2 = \frac{1}{1+a}$, 则 $1+a > 0$ 或 $a > -1$.

$y'' = \mp \frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}}$, 当 $y \geq x$ 时上式取负号; 当 $y \leq x$ 时上式取正号. 于是, 当 $y \geq x$ 时, 有

(1) 若 $a > 0$, 则当 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时, 由于 $y'' < 0$, 故取得极大值 $y = \sqrt{1+a}$.

若 $-1 < a < 0$, 则当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极大值 $y = -\sqrt{1+a}$. 当 $x = \pm 1$ 时取得边界极小值 $y = \mp 1$

($a \neq 0$).

(2) 由于 $y'' < 0$, 故曲线是凸的. 当 $y \leq x$ 时, 有

(3) 若 $a > 0$, 当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值 $y = -\sqrt{1+a}$. 若 $-1 < a < 0$, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值 $y =$

$\sqrt{1+a}$. 当 $x = \pm 1$ 时取得边界极大值 $y = \mp 1$.

(4) 由于 $y'' > 0$, 故曲线是凹的. 此外, 当 $a < 0$ 时, 曲线有渐近线, 容易求得它们为 $y = (1 \pm \sqrt{-a})x$. 椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉, 故图略.

【1554】 $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$.

解 原方程可变形为 $y - \frac{x}{2} = e^{-ax}$. 因此, 若作仿射变换 $\begin{cases} \xi_1 = -\frac{x}{2} + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$ 则原方程化成标准形式

$\xi_1 = e^{-a\xi_2}$

当 $a \neq 0$ 时, 表示一指数曲线族; 当 $a = 0$ 时, 表示直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$. 全族曲线均通过点 $(0, 1)$.

$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}$. 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{a} \ln 2a$.

$y'' = a^2 e^{-ax} > 0$, 故曲线呈凹状. 若 $a > 0$, 则当 $x = \frac{1}{a} \ln 2a$ 时

有极小值 $y = \frac{1}{2a} (1 + \ln 2a)$;

若 $a \leq 0$, 则因 $y' > 0$, 故函数 y 是递增的.

现求渐近线: 当 $a > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0,$$

故渐近线为 $y = \frac{x}{2}$.

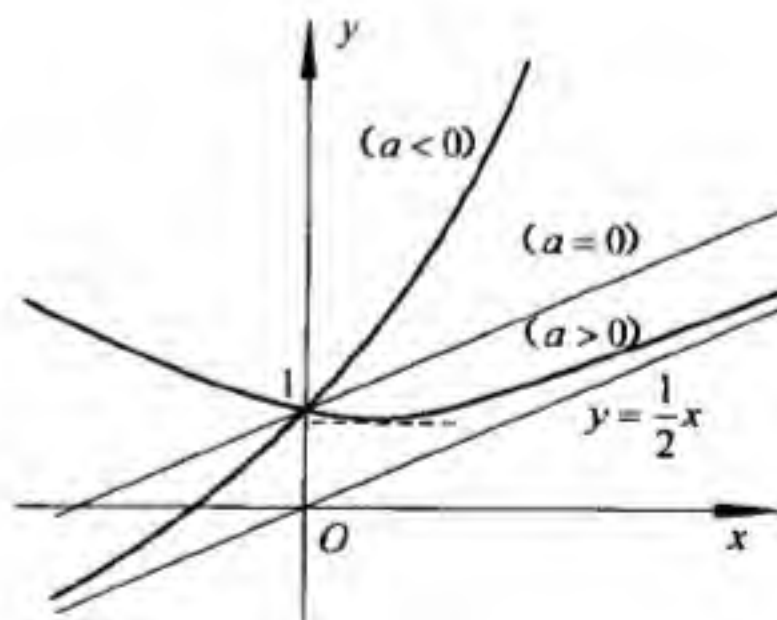


图 2.143

同法求得当 $a < 0$ 时, 渐近线也为 $y = \frac{x}{2}$, 然此时应考虑 $x \rightarrow -\infty$. 如图 2.143 所示.

【1555】 $y = xe^{-\frac{x}{a}}$

解 全族曲线均通过原点.

$y' = e^{-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x}{a} \right)$. 令 $y' = 0$, 得 $x = a$.

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}} \left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a} \right). \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 2a.$$

经判别知:

若 $a > 0$, 当 $x = a$ 时有极大值 $y = ae^{-1} \approx 0.37a$;

若 $a < 0$, 当 $x = a$ 时有极小值 $y = ae^{-1}$.

拐点 $x = 2a$, $y = 2ae^{-2} \approx 0.27a$.

容易求得, 渐近线为 $y = 0$. 与 1554 题类似, 当 $a > 0$ 时应考虑 $x \rightarrow +\infty$; 当 $a < 0$ 时应考虑 $x \rightarrow -\infty$.

又曲线族与直线 $y = x$ 在原点相切, 如图 2.144 所示.

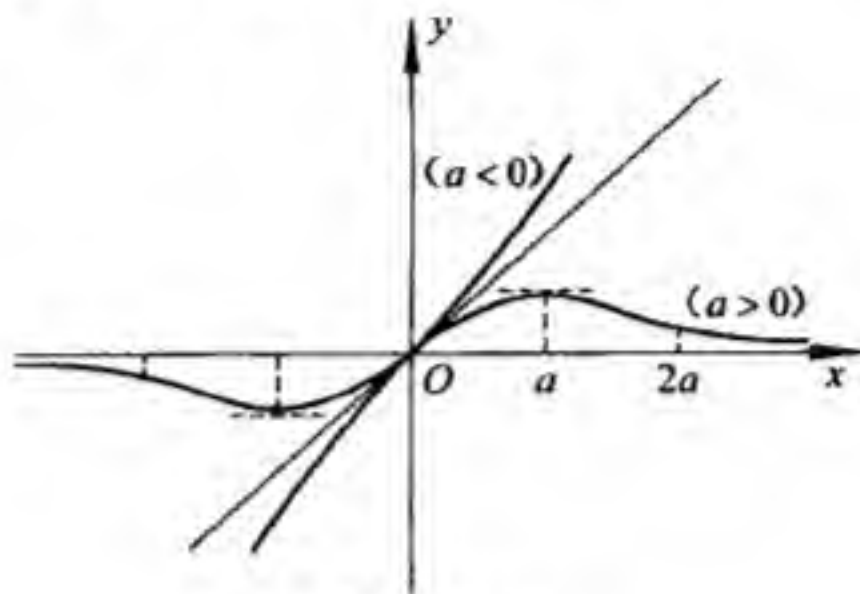


图 2.144

§ 13. 函数的极大值与极小值问题

【1556】 证明: 若函数 $f(x)$ 不为负, 则函数

$$F(x) = Cf^2(x) \quad (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

证 如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点, 则在 x_0 点附近有

$$F(x_0) > F(x) \quad (x \neq x_0) \quad (*)$$

即 $Cf^2(x_0) > Cf^2(x)$. 根据 $C > 0$, 以及 $f(x)$ 不为负, 必有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近, 且 } x \neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点. 反之, 若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 则在 x_0 附近, 有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0).$$

于是,

$$Cf^2(x_0) > Cf^2(x),$$

即 (*) 式成立. 这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点. 同样道理, 若 x_0 为极小值点时, 也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点.

【1557】 证明: 若当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 严格单调递增, 则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点, 例如是极大值点, 则在 x_0 点附近有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0). \quad (1)$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为严格单调递增的, 故也有

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \quad (x \neq x_0). \quad (2)$$

这就证明了点 x_0 也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之也对, 因为由 (2), 从 $\varphi(x)$ 的严格单调递增性质知必有 (1). 另一种情形, 即设点 x_0 是极小值点时, 也可类似获证. 于是, 原命题得证.

【1558】 二正数的和等于常数 a , 求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 ($m>0, n>0$) 之积的极大值.

提示 设一正数为 x , 由题设, 我们只要求函数 $f(x)=x^m(a-x)^n$ ($0<x<a; m>0, n>0$) 的极大值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们只要求函数

$$f(x)=x^m(a-x)^n \quad (0<x<a)$$

的极大值. 由于 $f'(x)=x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma-(m+n)x]$, 故若令 $f'(x)=0$, 即得 $x=\frac{ma}{m+n}$. 当 $0<x<\frac{ma}{m+n}$

时, $f'(x)>0$; 当 $\frac{ma}{m+n}<x<a$ 时, $f'(x)<0$. 因此, 当 $x=\frac{ma}{m+n}$ 时, $f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right)=\frac{a^{m+n}m^mn^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

【1559】 二正数的乘积等于常数 a , 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 ($m>0, n>0$) 之和的极小值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们只要求函数

$$f(x)=x^m+\left(\frac{a}{x}\right)^n \quad (0<x<+\infty)$$

的极小值.

由于

$$f'(x)=\frac{mx^{m+n}-na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然, 在此点的左边, $f'(x)<0$, 而在此点的右边, 有 $f'(x)>0$, 故知当

$x=\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}}a^{\frac{n}{m+n}}\right]=(m+n)\left(\frac{a^m}{m^mn^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

【1560】 当对数之底取何值时存在这样的数, 它本身和它的对数相等?

解 解法 1:

设所求之数为 a , 则对于 $0<a<1$, $1<a<+\infty$ 及 $x>0$ 时

$$\log_a x = x \quad \text{或} \quad a^x = x. \quad (1)$$

问题即为取怎样的数 a , 上式才成立.

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况, 我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases} y=a^x, \\ y=x. \end{cases} \quad (2)$$

在交点处, 方程(1)与(2)等价(图 2.145).

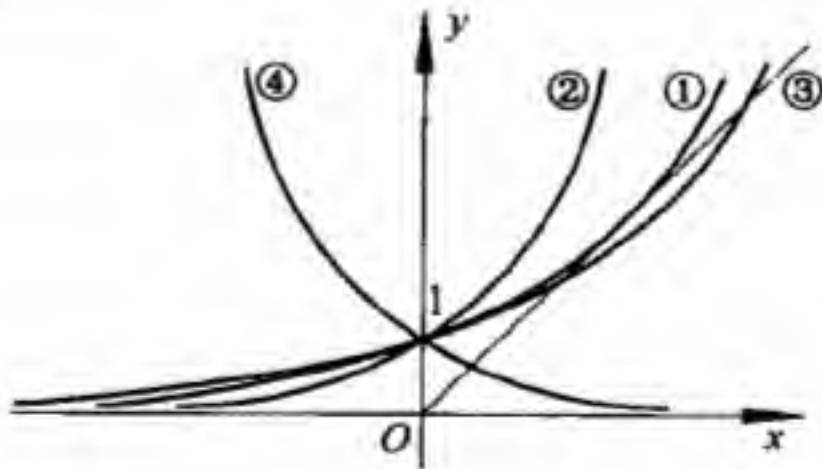


图 2.145

注意, 指数曲线 $y=a^x$ 与直线 $y=x$ 是否有公共点, 就看其差

$$\Delta=f(x)=a^x-x$$

有无使 $\Delta=f(x)=0$ 的点 x .

设 $y=a_0^x$ 与 $y=x$ 相切于一点 $(x_0, a_0^{x_0})$, 此时 $f'(x_0)=0$, 即有

$$a_0^x \ln a_0 - 1 = 0. \quad (3)$$

从 $\Delta=0$ 知有(1), 即

$$a_0^x - x = 0. \quad (4)$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0 = e^{\frac{1}{e}}, \quad x_0 = e. \quad (5)$$

当 $a > a_0$ 时, 易见 $y = a^x$ 比 $y = a_0^x$ 远离直线 $y = x$. 故此时无交点. 实际上, 注意到有 $a_0^x \geq x$, 并记 $g(a, x) = a^x$, 对于 $x \geq 0$, 只要 $a > a_0$ 就有 $a^x > a_0^x \geq x$, 也即 $g(a_0, x)$ 是 $g(a, x)$ 的极小值. 故当 $a > a_0$ 时, $y = a$ 与 $y = x$ 无交点. 而当 $0 < a \leq a_0$ 时(且要求 $a \neq 1$), 此时(2)有解, 从而(1)有解. 如图 2.145 中曲线①、②、③、④所示.

解法 2:

设 $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$, 则由 $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 得 $x = e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$ 由正变负, 故知 $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 为极大值. 从而, $0 < x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$.

因此, 当 $0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a \neq 1$ 时, 有 $\log_a x = x$.

【1561】 从面积为给定值 S 的一切矩形中, 求其周长为最小者.

解 设矩形的一边长为 x , 则另一边长为 $\frac{S}{x}$, 周长为

$$f(x) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right),$$

按题设, 我们只要求其最小值.

由于 $f'(x) = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$, 故令 $f'(x) = 0$, 即得 $x = \sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S}) > 0$ 知, 此时 $f(x)$ 有极小值. 又由于极值的唯一性, 故此值也为最小值. 因此, 所求的矩形为以 \sqrt{S} 为边的正方形.

【1562】 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数, 求具有最大面积的直角三角形.

解 设一直角边为 x , 则按题设, 另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$, 故直角三角形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - 2ax}.$$

利用极值的解法得: 当 $x = \frac{a}{3}$ 时, $S(x)$ 值为极大值. 又由于极值的唯一性, 故知当 $x = \frac{a}{3}$ 时, $S(x)$ 取最大值. 此时斜边为 $a - x = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$, 它为直角边的两倍, 故此三角形的两锐角分别为 30° 及 60° .

本题也可用 1556 题的结论求得结果. 事实上, 令 $F(x) = 4S^2(x)$, 则 $F(x)$ 与 $S(x)$ 有相同的极值点, 对 $F(x)$ 求极值可得同样的结果.

【1563】 要使容积为给定值 V 的圆柱形闭合容器有最小的表面积, 其尺寸如何?

解 设容器的底半径为 x , 则高为 $H = \frac{V}{\pi x^2}$, 故圆柱体的表面积为

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2.$$

由于

$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2},$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$ 知, 当 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, $S(x)$ 有极小值

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值, 故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 而高为 $\frac{V}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小表面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

【1564】 在不超过半圆的给定弓形内作出具有最大面积的内接矩形.

解 由图 2.146 知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA = \cos\varphi, \quad BC = \sin\alpha, \quad BA = \cos\alpha - \cos\varphi.$$

从而,矩形面积为

$$S(\alpha) = 2BC \cdot BA = 2\sin\alpha(\cos\alpha - \cos\varphi) = \sin 2\alpha - 2\sin\alpha\cos\varphi.$$

而

$$S'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi = 4\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi - 2.$$

令 $S'(\alpha) = 0$, 可得

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}.$$

注意到 $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $\cos\varphi \leq \cos\alpha$. 于是, 有

$$S''(\alpha) = -4\sin 2\alpha + 2\cos\varphi\sin\alpha \leq -4\sin 2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha = -3\sin 2\alpha < 0.$$

这就说明

$$\alpha = \arccos \frac{\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi + 8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点, 也就是说此时弓形内所对应的内接矩形面积最大.

【1565】 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中, 作出具有最大面积而边平行于椭圆轴的内接矩形.

解 如图 2.147 所示.

由于点 $M(x, y)$ 在椭圆上, 故适合方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解之, 得 $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. 于是, 按题设, 求函数

$$f(x) = 4x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

当 x 为何值时最大, 记 $C = \frac{a^2}{16b^2}$, 利用 1556 题的结果, $f(x)$ 与 $F(x) = Cf^2(x) = x^2(a^2 - x^2)$ 有相同的极值

点. 但 $F'(x) = 4x(\frac{a^2}{2} - x^2)$, 令 $F'(x) = 0$, 则 $x = 0$ (不适合), $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 当 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, 有 $F''(\frac{a}{\sqrt{2}}) = -4a^2 < 0$,

故 $f(\frac{a}{\sqrt{2}}) = 2ab$ 为最大面积. 此时内接矩形的边为 $a\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$.

【1566】 在底边为 b 及高为 h 的三角形中, 作出具有最大周长的内接矩形, 研究此问题有解的可能性.

解 如图 2.148 所示.

$AB = b, CD = h$. 由于 $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$, 故 $x = \frac{b}{h}(h-y)$. 矩形的周长为

$$p = 2\left[y + \frac{b}{h}(h-y)\right] = 2\left[\left(1 - \frac{b}{h}\right)y + b\right].$$

显见, 当 $h = b$ 时, 周长 $p = 2b$ 为一定值; 当 $h > b$ 时, $p'_y > 0$, p 单调增加, 故当 $y = h$ 时有边界的极大值 $p = 2h$; 当 $h < b$ 时, $p'_y < 0$, p 单调减少, 理论上当 $y = 0$ 时有边界的极大值 $2b$. 但作出的内接矩形不允许边长为零, 故当 $h < b$ 时作出的内接矩形有最大周长是不存在的, 即此时问题无解.

【1567】 从直径为 d 的原木(圆柱横截面)切出横截面为矩形的梁, 此矩形的底等于 b , 高等于 h . 若梁

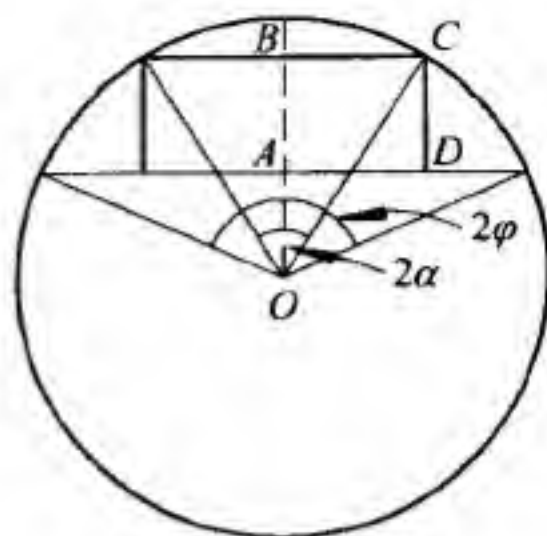


图 2.146

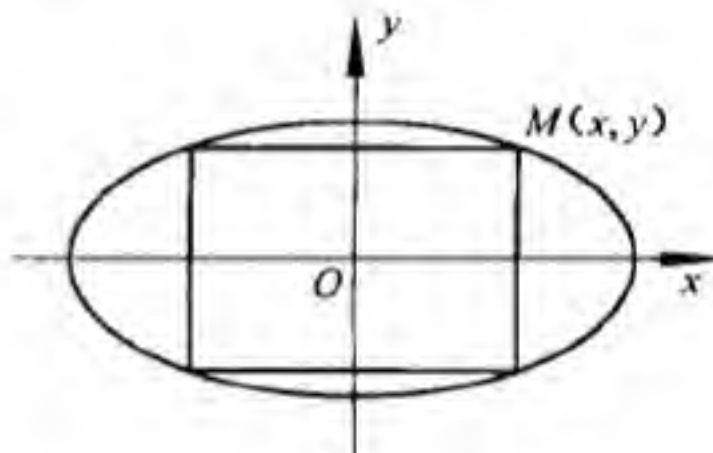


图 2.147

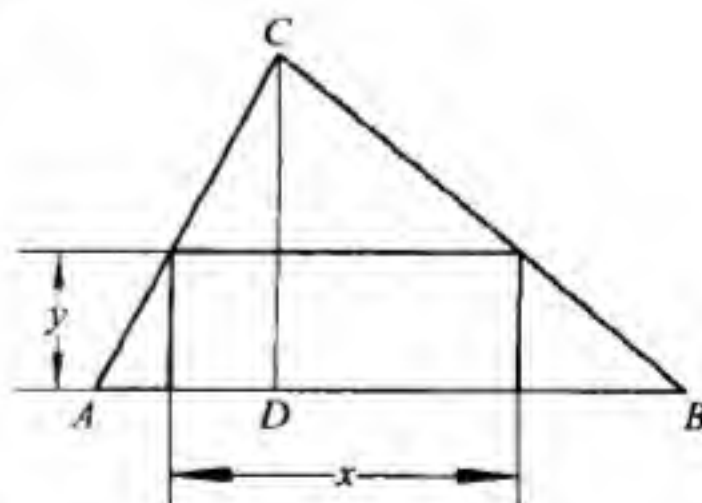


图 2.148

的强度与 bh^2 成正比,问梁的尺寸如何,其强度最大?

解 由于 $b^2 + h^2 = d^2$, 故 $h^2 = d^2 - b^2$, 按题设, 我们只要考虑函数

$$f(b) = b(d^2 - b^2)$$

何时取最大值.

由于 $f'(b) = d^2 - 3b^2$, 令 $f'(b) = 0$ 得 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$. 此时 $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, $f''(b) = -6b < 0$, $f(b)$ 的值最大. 因此,

所求矩形的底为 $\frac{d}{\sqrt{3}}$, 高为 $d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

【1568】 在半径为 R 的半球中作出具有最大体积且底为正方形的内接长方体.

解 设底边之一半为 x , 则按题设, 有

$$2x^2 + y^2 = R^2,$$

其中 y 为长方体高之一半. 解之, 得 $y = \sqrt{R^2 - 2x^2}$. 由题设, 我们只要考虑函数

$$f(x) = 4x^2 y = 4x^2 \sqrt{R^2 - 2x^2}$$

何时取最大值.

$$f'(x) = \frac{8x(R^2 - 3x^2)}{\sqrt{R^2 - 2x^2}},$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$, 此时 $y = \frac{R}{\sqrt{3}}$. 经判别可知, $f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ 值为最大. 因此, 所求的长方体之底、宽、高分别为

$\frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{2R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}$, 而最大体积为

$$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4R^3}{3\sqrt{3}}.$$

【1569】 在半径为 R 的球内作出具有最大体积的内接圆柱体.

提示 设圆柱体的底半径为 r , 高为 $2h$, 则有 $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. 由题设, 我们只要考虑函数 $f(r) = 2\pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$ 何时最大.

解 设圆柱体的底半径为 r , 高为 $2h$, 则有

$$r^2 + h^2 = R^2,$$

即 $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. 按题设, 我们只要考虑函数

$$f(r) = 2\pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$$

何时取最大值.

$f'(r) = \frac{2\pi r(2R^2 - 3r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}}$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, 此时 $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$, 且

$$f(r) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知, 此值即为圆柱体体积的最大值.

【1570】 在半径为 R 的球内作出具有最大表面积的内接圆柱体.

解 如图 2.149 所示, 圆柱体的表面积为

$$S = 2\pi(R\cos\varphi)^2 + 4\pi(R\cos\varphi)(R\sin\varphi) = \pi R^2(1 + \cos 2\varphi) + 2\pi R^2 \sin 2\varphi.$$

由 $\frac{dS}{d\varphi} = 0$ 得 $\tan 2\varphi = 2$. 记其解为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan 2, \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

于是, $\sin 2\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. 又由于

$$\begin{aligned}\left. \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} &= -4\pi R^2 [2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi]_{\varphi=\varphi_0} \\ &= -4\pi R^2 \left[2\sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0 \right] = -10\pi R^2 \sin 2\varphi_0 < 0,\end{aligned}$$

故此时表面积最大,且最大表面积为

$$S = \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \pi R^2 (1 + \sqrt{5}) \approx 0.81 \times 4\pi R^2.$$

从而,球内接圆柱体的最大表面积约为球面面积的 81%.

【1571】 在已知球外作出具有最小体积的外切圆锥体.

解 设外切圆锥体的底半径为 x , 高为 h , 球的半径为 R ,

则可求得 $h = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}$, 于是, 外切圆锥体的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2} = \frac{2}{3}\pi R \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2} \quad (x > 0).$$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经判别可知, 此时体积最小, 且

$$V \Big|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥体的最小体积是球体体积的二倍.

【1572】 求母线为给定值 l 的圆锥体之最大体积.

解 设圆锥体的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥体的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只要求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2 r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知, $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此,

所求的圆锥体的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

【1573】 在顶角为 2α 底半径为 R 的直圆锥体中作出具有最大表面积的圆柱体.

解 设 r 及 h 为圆柱体的底半径与高, H 为圆锥体的高(如图 2.150). 按题设, 只要求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于

$$\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}, \quad \text{即} \quad \frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}, \quad \text{故} \quad h = \frac{R-r}{R}H,$$

其中 $H = R \cot \alpha$ 是已知常数. 于是,

$$S = f(r) = 2\pi \left[r^2 + rH \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right] \quad (0 \leq r \leq R),$$

$$f'(r) = 2\pi \left(2r + H - \frac{2r}{R}H \right).$$

令 $f'(r) = 0$, 得 $r = \frac{HR}{2(H-R)}$, 此值应在 0 与 R 之间, 即 $H > R$ 与

$\frac{R}{H} = \tan \alpha < \frac{1}{2}$. 经判别可知, 此时 $f(r)$ 为最大, 因此, 所求的圆柱体

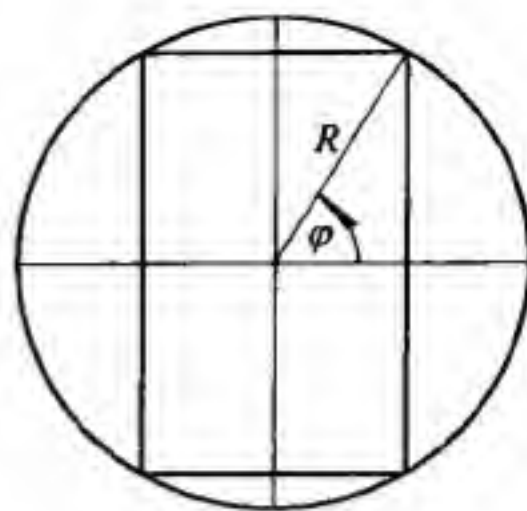


图 2.149

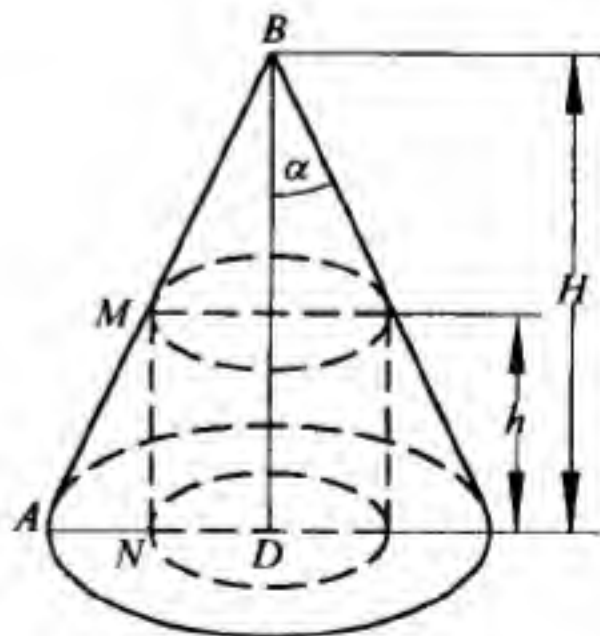


图 2.150

当 $\tan\alpha < \frac{1}{2}$ 及 $r = \frac{R}{2(1-\tan\alpha)}$ 时达到最大值. 当 $\tan\alpha \geq \frac{1}{2}$ 即 $H \leq 2R$ 时, 由于 $f'(r) = \frac{2\pi}{R}[(2R-H)r + H(R-r)]$ 大于零. 因此, 当 $r=R$ 时, 达到边界的极大值, 但是, 当 $r=R$ 时, 显然有 $h=0$, 于是, 得到的解可以考虑作为一个扁平的圆柱体, 它的两底都与已知圆锥的底重合, 而全表面积为 $2\pi R^2$.

【1574】 求从点 $M(p, p)$ 到抛物线 $y^2 = 2px$ 的最短距离.

解 按题设, 只要求函数

$$f(y) = (x-p)^2 + (y-p)^2 = x^2 + 2p^2 - 2py = \frac{y^4}{4p^2} + 2p^2 - 2py$$

的极小值.

由于 $f'(y) = \frac{y^3 - 2p^2}{p^2}$. 令 $f'(y) = 0$ 得 $y = \sqrt[3]{2}p$, 此时 $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}p$. 经判别可知, $f(\sqrt[3]{2}p)$ 为最小. 因此, 所求的最短距离为

$$\sqrt{f(\sqrt[3]{2}p)} = p \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - 1\right)^2 + (\sqrt[3]{2} - 1)^2} = p(\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt{\left[\frac{\sqrt[3]{4} - 2}{2(\sqrt[3]{2} - 1)}\right]^2 + 1} = p(\sqrt[3]{2} - 1) \sqrt{\frac{\sqrt[3]{2} + 2}{2}}.$$

【1575】 求从点 $A(2, 0)$ 到圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的最短与最长距离.

解 显见, 最短距离为 1, 最长距离为 3, 事实上, 用微分法也可解之, 只要求函数

$$(x-2)^2 + y^2 = 5 - 4x = f(x)$$

的极值.

由于 $f'(x) = -4 < 0$, 故 $f(x)$ 递减, 因此, 当 $x = -1$ 时, 有最大值 $\sqrt{f(-1)} = 3$; 而当 $x = 1$ 时有最小值 $\sqrt{f(1)} = 1$.

【1576】 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 < b < a$) 的经过顶点 $(0, -b)$ 的最大弦.

解 按题设, 我们只要求函数

$$\begin{aligned} x^2 + (y+b)^2 &= x^2 + y^2 + 2by + b^2 = \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2\right) + y^2 + 2by + b^2 \\ &= \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y^2 + 2by + (a^2 + b^2) = f(y) \end{aligned}$$

的最大值. 为此, 先求得 $f'(y) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)y + 2b$. 令 $f'(y) = 0$, 得 $y = \frac{b^3}{a^2 - b^2} = \frac{b^3}{c^2}$ ($c = \sqrt{a^2 - b^2}$), 此时

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^6}{c^4} = a^2 \left(1 - \frac{b^4}{c^4}\right),$$

或

$$x = \pm \frac{a}{c^2} \sqrt{c^4 - b^4} = \pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2} \quad (b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}).$$

经判别可知, 此时弦长为最大值, 且其值为

$$\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{b^4}{c^4}\right) + \left(\frac{b^3}{c^2} + b\right)^2} = \frac{a^2}{c}.$$

此即最大弦长. 弦的一端点为 $(0, -b)$, 另一端点为 $\left(\pm \frac{a^2}{c^2} \sqrt{a^2 - 2b^2}, \frac{b^3}{c^2}\right)$, 但仅当 $b \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, $\sqrt{a^2 - 2b^2}$ 才有意义.

若 $b > \frac{a}{\sqrt{2}}$, 则由于

$$f'(y) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + 2b > 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)(-b) + 2b = \frac{2a^2}{b} > 0,$$

故当 $y = b, x = 0$ 时, 取得弦长的边界最大值, 此时最大弦长为 $2b$.

【1577】 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点 $M(x, y)$ 引切线, 使由此切线与坐标轴构成的三角形具有最小的面积.

解 切线斜率为 $k = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, 于是, 切线方程为

$$Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(X - x).$$

不失一般性, 可设点 M 在第一象限. 它在两坐标轴上的截距分别为 $\frac{a^2}{x}$ 和 $\frac{b^2}{y}$. 因此, 所求三角形的面积为

$$\frac{a^2 b^2}{2xy} = \frac{a^3 b}{2x \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

按题设, 我们只要求函数

$$f(x) = x^2(a^2 - x^2)$$

的最大值. 为此, 先求得

$$f'(x) = 2a^2 x - 4x^3.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, 此时 $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, 经判别可知, $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 为最大值. 因此, 所求的点为 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$, 三角形面积的最小值为 ab .

【1578】 直径相同的圆柱体与半球体拼接在一起构成一物体, 其体积为给定值 V . 要使此物体具有最小的表面积, 其尺寸如何?

解 设 r 为圆柱体的底半径, h 为其高, 则按题设, 我们有

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h \quad \text{或} \quad h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x) = 3\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r \right) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

$$S'(r) = \frac{10}{3}\pi r - \frac{2V}{r^2},$$

令 $S'(r) = 0$, 得 $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, 此时 $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知, $S\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值. 因此, 当 $r = h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小.

【1579】 若明渠的横截面为等腰梯形, 渠中流水的横截面面积为 S , 水面的高为 h , 问水渠侧边的倾角 φ 如何, 才使其横截面边界被水浸湿的部分具有最小的长度?

解 浸湿长 $l = a + 2h \csc \varphi$, 其中 a 为底边长, 而截面面积为

$$S = \frac{1}{2}(2a + 2h \cot \varphi)h = ah + h^2 \cot \varphi.$$

于是, 被水浸湿部分的长度为

$$l = 2h \csc \varphi + \frac{S}{h} - h \cot \varphi.$$

由 $\frac{dl}{d\varphi} = -\frac{2h \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{h}{\sin^2 \varphi} = 0$, 得 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60^\circ$. 因为

$$\left. \frac{d^2 l}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=60^\circ} = \frac{2h \sin^3 \varphi - h \sin 2\varphi (1 - 2\cos \varphi)}{\sin^4 \varphi} \bigg|_{\varphi=60^\circ} > 0,$$

所以, 当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 横截面被水浸湿的部分具有最小的长度.

【1580】 设封闭曲线所围面积为 S , 则该曲线的周长与面积同为 S 的圆的周长之比称为封闭曲线的“弯曲度”.

设等腰梯形 $ABCD$ ($AD \parallel BC$) 的底边 $AD = 2a$, 锐角 $BAD = \alpha$, 问等腰梯形的形状如何, 才有最小的弯曲度?

解 设腰 $AB = CD = b$, 则梯形的周长为

$$l = 4a + 2b(1 - \cos \alpha),$$

梯形的面积为

$$S = (2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha.$$

令 $S = \pi R^2$ 得

$$R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{(2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha},$$

相应的圆周长为

$$L = 2\pi R = 2\sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha}.$$

令弯曲度为 K , 则

$$K = \frac{l}{L} = \frac{2a + b(1 - \cos\alpha)}{\sqrt{\pi(2a - b\cos\alpha)bs\sin\alpha}}.$$

由 $\frac{dK}{db} = 0$, 得 $b = a\sec^2 \frac{\alpha}{2}$. 可以验证, 当 $AB = CD = a\sec^2 \frac{\alpha}{2}$ 时, 具有最小的弯曲度, 此时, 梯形恰好外切于某圆.

【1581】 从半径为 R 的圆中应切去怎样的扇形, 才能使余下的部分可卷成一漏斗, 其容积为最大?

解 设余下部分的中心角为 x , 则漏斗(呈圆锥形)底的周长为 Rx , 底半径为 $\frac{Rx}{2\pi}$ (R 为原圆的半径), 其高为

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2},$$

其容积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2} x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

按题设, 我们只要求 x 为何值时, 函数 $f(x) = x^2(4\pi^2 - x^2)$ 的值最大. 为此, 先求得

$$f'(x) = 16\pi^2 x^3 - 6x^5.$$

令 $f'(x) = 0$, 要注意不允许 $x = 0$, 得 $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. 经判别可知, $f\left(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此, 所切去的扇形的中心角应为

$$2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

【1582】 从南至北的铁路经过 B 城, 某工厂 A 距此铁路的最短距离为 a km, 距偏北面之 B 城所在纬线的距离为 b km. 为了从 A 到 B 运输货物最经济, 从工厂修建一条专线铁路, 若每吨货物沿专线铁路运输的价格是 p 元/km, 而沿常规铁路为 q 元/km ($p > q$), 则专线应向常规铁路取怎样的角度 φ ?

解 如图 2.151 所示, 所需运费为

$$M = (b - a\cot\varphi)q + \sqrt{a^2 + a^2\cot^2\varphi}p = qb - aq\cot\varphi + pa\csc\varphi.$$

由 $\frac{dM}{d\varphi} = \frac{aq}{\sin^2\varphi} - \frac{ap\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = 0$, 得 $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$. 又

$$\left. \frac{d^2M}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} = ap \frac{1}{\sin^3\varphi_0} > 0,$$

故当 $\arccos \frac{q}{p} \geq \arctan \frac{a}{b}$ 时, $\varphi_0 = \arccos \frac{q}{p}$, 相应运费最省;

当 $\arccos \frac{q}{p} < \arctan \frac{a}{b}$ 时, $\varphi_0 = \arctan \frac{a}{b}$, 运费最省.

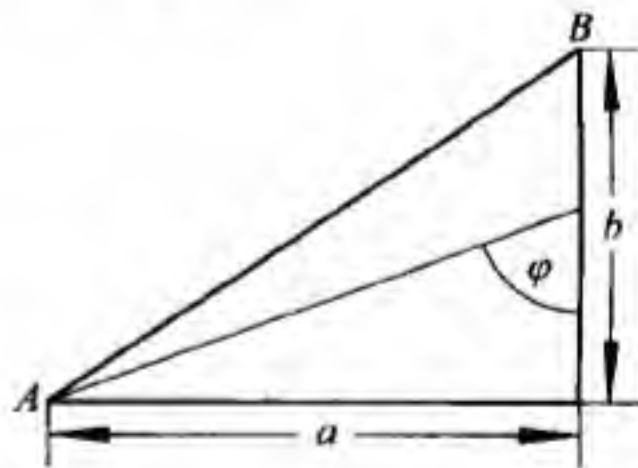


图 2.151

【1583】 两船各以恒定的速度 u 和 v 沿直线前进, 二者前进方向所成的角为 θ . 若在某时刻它们到其路线交点之距离分别为 a 和 b , 求二船的最小距离.

解 设两船与路线交点的距离分别为 a, b 时的时刻 $t_0 = 0$, 则时刻为 t 时两船的距离 s 适合下式:

$$s^2 = (a + ut)^2 + (b + vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt)\cos\theta.$$

由 $2s \frac{ds}{dt} = 2(a + ut)u + 2(b + vt)v - 2(bu + 2uvt + av)\cos\theta = 0$, 解得

$$t_1 = -\frac{au + bv - (av + bu)\cos\theta}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}.$$

于是,相应地有

$$\begin{aligned}s^2 &= (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta) + 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]t_1 + (u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta)t_1^2 \\&= \frac{1}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta} \{ (a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) - 2[(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2 \\&\quad + [(au + bv) - (av + bu)\cos\theta]^2 \} \\&= \frac{[(av - bu)\sin\theta]^2}{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}.\end{aligned}$$

经判别可知,此时 s 最小:

$$s = \frac{|av - bu| \sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$$

又两船的最小距离也可在 $t_0 = 0$ 之前达到. 类似地,可求得最小距离为 $s = \frac{|av + bu| \sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$

总之,两船间的最小距离为

$$s = \frac{|av \mp bu| \sin\theta}{\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}}.$$

【1584】 在 A 与 B 二点处各有一光源,其发光强度分别为 S_1 与 S_2 . 在线段 $AB = a$ 上求出最小照度的点 M .

解 设 $AM = x$, 则照度

$$I = \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{(a-x)^2}.$$

由 $\frac{dI}{dx} = -\frac{2S_1}{x^3} + \frac{2S_2}{(a-x)^3} = 0$ 得 $S_2 x^3 = S_1 (a-x)^3$. 解之,得

$$x = a \left(1 + \sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}} \right)^{-1}.$$

经判别可知,此时照度最小.

【1585】 发光点位于半径为 R 与 r ($R > r$) 的二互不相交之球的连心线上,并在此二球的外面,此发光点的位置如何,才可使二球表面上被照明部分之和为最大?

解 设发光点离大球中心之距离为 x , 两球中心之距离为 a , 则按球冠面积公式推知被照明部分面积之和为

$$S = 2\pi R \left(R - \frac{R^2}{x} \right) + 2\pi r \left(r - \frac{r^2}{a-x} \right),$$

式中 x 应满足 $R < x \leq a - r$. 由

$$\frac{dS}{dx} = 2\pi R^3 \cdot \frac{1}{x^2} - 2\pi r^3 \cdot \frac{1}{(a-x)^2} = 0,$$

得

$$x = \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}}},$$

又由 $x \leq a - r$ 可得

$$\frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{3}{2}}} a \leq a - r, \quad \text{即} \quad a \geq r + R \sqrt{\frac{R}{r}},$$

经判别可知,此时被照明面积最大.

当 $R + r < a < r + R \sqrt{\frac{R}{r}}$ 时,显然有 $x = a - r$, 经判别可知,此时被照明面积也为最大.

【1586】 设圆桌面的半径为 a , 应当在正对桌面中央多高的地方安置电灯, 才可使桌面边缘的照度为最大?

解 如图 2.152 所示, 由物理学知, 照度 I 为

$$I = I_0 \frac{\sin \varphi}{r^2} = I_0 \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3} \quad (I_0 \text{ 为光源的发光强度, 它是常数}).$$

考虑函数 $f(r) = \frac{r^2 - a^2}{r^3} = \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^3}$ 何时最大, $f'(r) = -\frac{4}{r^3} + \frac{6a^2}{r^5} = \frac{6a^2 - 4r^2}{r^5}$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{3}{2}}a$. 经判别可知, $f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此,

我们应在高 $h = \sqrt{\frac{3}{2}a^2 - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安置电灯, 才可使桌面边缘上的照度为最大.

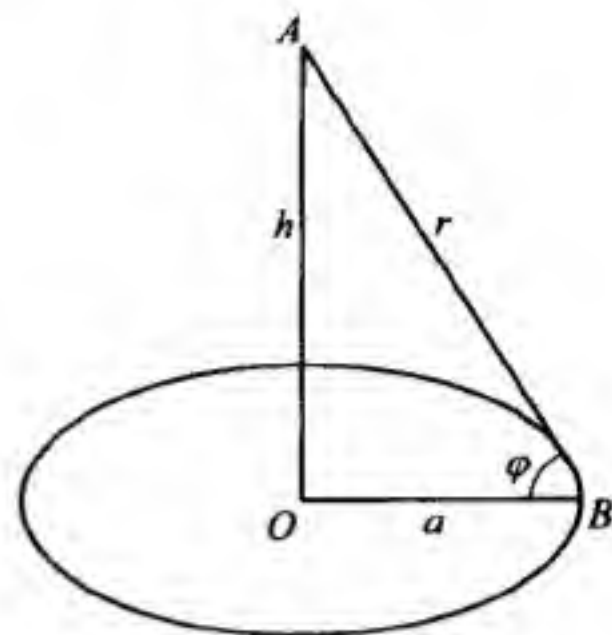


图 2.152

【1587】 向宽为 a 的河修建一宽为 b 的运河, 二者成直角相交, 问能驶进这运河的船, 其最大的长度如何?

解 如图 2.153 所示, BC 的长度为

$$l = a \csc \varphi + b \sec \varphi, \quad l' = \frac{b \sin^3 \varphi - a \cos^3 \varphi}{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi},$$

令 $l' = 0$ 得 $\tan \varphi_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 或 $\cot \varphi_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, 从而有

$$\csc \varphi_0 = \frac{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}, \quad \sec \varphi_0 = \frac{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$l'' \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 3 \left(\frac{b}{\cos \varphi_0} + \frac{a}{\sin \varphi_0} \right) > 0,$$

因此, $l \Big|_{\varphi=\varphi_0}$ 为最小值, 即船的最大长度为 $l \Big|_{\varphi=\varphi_0} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

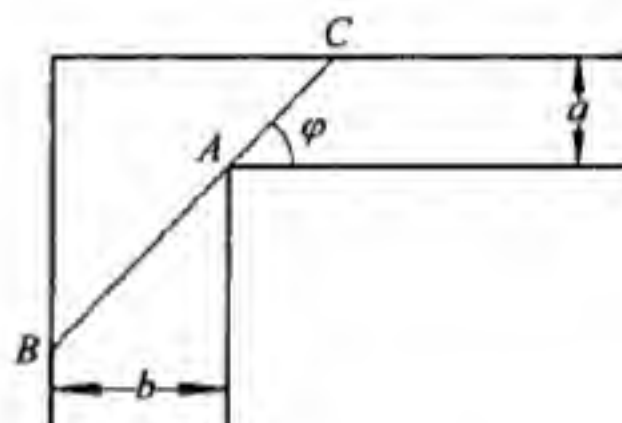


图 2.153

【1588】 船航行一昼夜的耗费由两部分组成: 固定部分等于 a 元, 变动部分与速度的立方成正比增加. 在怎样的速度 v 时, 船航行最为经济?

解 设航行的全路程为 s , 速度为 v , 则总耗费为

$$Q = (a + kv^3) \frac{s}{v} = \frac{as}{v} + skv^2.$$

由 $\frac{dQ}{dv} = 0$ 得 $v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. 经判别可知, 此时船航行最经济.

【1589】 重量为 P 的物体位于粗糙的水平面上, 需用力把物体从原位置移动. 若物体摩擦因子等于 k , 问作用力对水平面的倾斜程度如何, 才使所需的力为最小?

解 设作用力 F 对水平面的倾角为 α , 则

$$F \cos \alpha = k(P - F \sin \alpha),$$

即

$$F = \frac{kP}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

令 $y = \cos \alpha + k \sin \alpha$, 为使 F 最小, 只要使 y 最大. 由

$$y'_\alpha = -\sin \alpha + k \cos \alpha = 0 \text{ 得 } \alpha_0 = \arctan k. \text{ 此时}$$

$y''_\alpha \Big|_{\alpha=\alpha_0} = -\cos \alpha_0 - k \sin \alpha_0 = -\sqrt{1+k^2} < 0$. 即当 $\alpha_0 = \arctan k$ 时, y 为最大值, 从而 F 为最小值, 也即此时用力最省.

【1590】 有一茶杯, 其形状为半径为 a 的半球, 在茶杯中放一长为 $l > 2a$ 的杆, 求杆的平衡位置.

解 取球心为坐标原点. 当 $2a < l \leq 4a$ 时, 设杆的质心的纵坐标为 y , 杆对杯口所在平面的倾角为 φ , 则

$$y = -\left(2a\cos\varphi - \frac{l}{2}\right)\sin\varphi \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2}).$$

当杆平衡时, y 最小, 为此, 求 y 的极值. 由 $y'_\varphi = -4a\cos^2\varphi + \frac{l}{2}\cos\varphi + 2a = 0$ 得

$$\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a} \quad (\text{负值不合适, 舍去}).$$

经判别可知, 此时 y 取最小值, 即当 $\cos\varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 128a^2}}{16a}$ 时, 棒取平衡位置.

当 $l > 4a$ 时, 杆的质心必在半球心外, 于是, 此时杆失去平衡, 无平衡位置.

§ 14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1° n 阶相切 对于两曲线 $y = \varphi(x)$ 及 $y = \psi(x)$, 若在点 x_0 有

$$\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

且

$$\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线在此点 n 阶相切(在严格的意义上讲!), 当 $x \rightarrow x_0$ 时有:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O((x - x_0)^{n+1}).$$

2° 曲率圆 若圆周

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

与已知曲线 $y = f(x)$ 二阶或更高阶相切, 则称此圆为在相应点的曲率圆. 这个圆的半径

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径, 而量 $k = \frac{1}{R}$ 称为曲率.

3° 渐屈线 曲率圆中心 (ξ, η) (曲率中心)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y = f(x)$ 的渐屈线.

【1591】 选择直线

$$y = kx + b$$

的参数 k 与 b , 使它与曲线

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

二阶或更高阶相切.

解 要二阶或更高阶相切, 必需使 $y'' = 6x - 6 = 0$, 即要 $x = 1$; 同时在 $x = 1$ 时, 两个一阶导数也应相等, 即 $k = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.

当 $x = 1$ 时, 代入方程 $x^3 - 3x^2 + 2 - y = 0$, 得 $y = 0$. 由于直线 $y = kx + b$ 也需通过点 $(1, 0)$, 故有

$$0 = -3 \cdot 1 + b, \quad \text{即} \quad b = 3.$$

因此, 所求的直线为

$$y = 3(1 - x),$$

参数 $k = -3, \quad b = 3$.

【1592】 应当怎样选择参数 a, b 和 c , 才能使抛物线

$$y = ax^2 + bx + c$$

在点 $x = x_0$ 与曲线 $y = e^x$ 二阶相切?

提示 由两曲线在点 $x = x_0$ 处 n 阶相切的定义, 应有 $ax_0^2 + bx_0 + c = e^{x_0}$, $2ax_0 + b = e^{x_0}$ 及 $2a = e^{x_0}$.

解 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$, 在点 $x=x_0$ 有

$$y' \Big|_{x=x_0} = 2ax_0 + b, \quad y'' \Big|_{x=x_0} = 2a, \quad y''' = 0.$$

按假设, 应有

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = e^{x_0}, \\ 2ax_0 + b = e^{x_0}, \\ 2a = e^{x_0}, \end{cases}$$

解之, 得

$$a = \frac{1}{2}e^{x_0}, \quad b = e^{x_0}(1-x_0), \quad c = e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right).$$

【1593】 下列曲线与 Ox 轴在点 $x=0$ 相切的阶如何:

$$(1) y=1-\cos x; \quad (2) y=\tan x-\sin x; \quad (3) y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right).$$

解 (1) $y'=\sin x, y''=\cos x$, 于是,

$$y' \Big|_{x=0} = 0, \quad y'' \Big|_{x=0} = 1.$$

而对于 Ox 轴 $y=0$, 始终有 $y'=0, y''=0$. 因此, 曲线 $y=1-\cos x$ 与 Ox 轴有一阶相切.

$$(2) y'=\sec^2 x-\cos x, \quad y''=2\sec^2 x \tan x+\sin x, \quad y'''=4\sec^2 x \tan^2 x+2\sec^4 x+\cos x,$$

于是, $y' \Big|_{x=0} = y'' \Big|_{x=0} = 0, y''' \Big|_{x=0} = 3 \neq 0$. 因此, 曲线 $y=\tan x-\sin x$ 与 Ox 轴有二阶相切.

$$(3) y'=e^x-1-x, \quad y''=e^x-1, \quad y'''=e^x, \text{ 于是,}$$

$$y' \Big|_{x=0} = y'' \Big|_{x=0} = 0, \quad y''' \Big|_{x=0} = 1 \neq 0.$$

因此, 曲线 $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$ 与 Ox 轴有二阶相切.

【1594】 证明: 曲线

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

提示 利用 1225 题的结果.

解 由 1225 题的结果知, 对于任意正整数 n , 有

$$y^{(n)} \Big|_{x=0} = 0,$$

此即证明了所给的曲线在点 $x=0$ 与 Ox 轴相切的阶为无穷大.

【1595】 求双曲线 $xy=1$ 在下列各点的曲率半径和曲率中心:

$$(1) M(1,1); \quad (2) N(100,0.01).$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{x}, \quad y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y'' = \frac{2}{x^3}.$$

(1) 在点 $M(1,1), y=1, y'=-1, y''=2$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{[1+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}{2} = \sqrt{2},$$

曲率中心 (ξ, η) 为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 1 - \frac{-1(1+1)}{2} = 2, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

(2) 在点 $N(100, 0.01), y=0.01, y'=-0.0001, y''=0.000002$.

与(1)相似, 代入公式, 近似地有曲率半径 $R=500000$ 和曲率中心为 $(150, 500000)$.

求下列曲线的曲率半径:

【1596】 抛物线 $y^2 = 2px$.

解 $y' = \frac{p}{y}$, $y'' = -\frac{p}{y^2} y' = -\frac{p^2}{y^3}$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{p^2}{y^3}\right|} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = p \left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} = p \left(1 + \frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

【1597】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 不妨设 $a > b$. 由于

$$y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

于是, 曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{a^3 b^3 \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} \\ &= \frac{(a^2 - \epsilon^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

【1598】 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 由于 $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$, 于是, 曲率半径为

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2 |y|^3}} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(a^2 b^2 x^2 - a^4 b^2 + b^4 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} \\ &= \frac{(\epsilon^2 x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ 为双曲线的离心率.

【1599】 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$, $y'' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}}}$, 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}}}\right|} = \left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}}}}\right| = 3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

【1600】 椭圆 $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{b}{a} \left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)}{-a \sin t} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t},$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \frac{b^2 \cot^2 t}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b}{a^2 |\sin t|^3}} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^3 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{a^2}{b} (1 - \epsilon^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}},$$

其中 ϵ 为椭圆的离心率.

【1601】 摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

解 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \cot \frac{t}{2}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{2} \sin t}{a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}},$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \cot^2 \frac{t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}} = 4a \left| \sin \frac{t}{2} \right| = 2\sqrt{2ay}.$$

【1602】 圆的渐伸线

$$x=a(\cos t + t \sin t), \quad y=a(\sin t - t \cos t).$$

解 由于 $\frac{dy}{dx} = \tan t$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a t \cos^3 t}$, 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(1 + \tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a |t \cos^3 t|}} = a |t|.$$

【1603】 证明: 二次曲线 $y^2 = 2px - qx^2$ 的曲率半径与法线段的立方成正比.

证明思路 注意到曲率半径为 $R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$, 法线段为 $l = |y \sqrt{1 + y'^2}|$, 即知 $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{|y^3 y''|}$. 可以证明 $y^3 y'' = -p^2$.

证 曲线的曲率半径公式为

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l = |y \sqrt{1 + y'^2}|,$$

因此, $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{|y^3 y''|}$. 下面求 $y^3 y''$:

因为 $y^2 = 2px - qx^2$, 故在等式两端分别对 x 求两次导数, 即得

$$2yy' = 2p - 2qx \quad \text{或} \quad yy' = p - qx, \quad (1)$$

$$yy'' + y'^2 = -q. \quad (2)$$

以 y^2 乘(2)式两端, 并以(1)式及原二次曲线的表达式代入左右端, 即得

$$y^3 y'' + (p - qx)^2 = -q(2px - qx^2);$$

化简之, 最后得

$$y^3 y'' = -p^2.$$

因此, $\frac{R}{l^3} = \frac{1}{p^2}$ 为一常数. 证毕.

【1604】 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

提示 由 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 其中 $r = r(\varphi)$, 求出 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 后, 易得

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|},$$

其中 $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, $r'' = \frac{d^2 r}{d\varphi^2}$.

解 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\varphi)$, 则由

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$$

可求得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin\varphi + r \cos\varphi}{r' \cos\varphi - r \sin\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{r^2 + 2r'r'' - rr'''}{(r' \cos\varphi - r \sin\varphi)^3},$$

其中 $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, $r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'r'' - rr'''|}.$$

求下列极坐标方程所表示的曲线的曲率半径:

【1605】 阿基米德螺线 $r=a\varphi$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 由于 $r'=a$, $r''=0$, 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}.$$

【1606】 对数螺线 $r=ae^{m\varphi}$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 由于 $r'=mae^{m\varphi}=mr$, $r''=m^2r$, 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{r^3(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+m^2r^3} = r\sqrt{1+m^2}.$$

【1607】 心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 $r'=-a\sin\varphi$, $r''=-a\cos\varphi$. 于是, 曲率半径为

$$R = \frac{[a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{a^2(1+\cos\varphi)^2 + 2a^2\sin^2\varphi + a^2\cos\varphi(1+\cos\varphi)} = \frac{2\sqrt{2}a^3(1+\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3a^2(1+\cos\varphi)} = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

【1608】 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 $r' = -\frac{a^2\sin 2\varphi}{r}$, $r'' = -\frac{r^3+a^4}{r^3}$,

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = \frac{3a^4}{r^2}, \quad (r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^6}{r^3}.$$

于是, 曲率半径为

$$R = \frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}} = \frac{a^2}{3r}.$$

【1609】 在曲线 $y=\ln x$ 上求曲率最大的点.

解题思路 先求出曲率半径

$$R = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

由题设, 我们只要考虑函数 $f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{x^2}$ 当 x 取何值时达到最小值.

解 由于 $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, 所以, 曲率半径为

$$R = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{|x|}.$$

按题设,我们只要考虑函数

$$f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{x^2}$$

当 x 取何值时达到最小值. 由于

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)^2(2x^2-1)}{x^3},$$

故令 $f'(x)=0$ 求得正根 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f'(x) > 0$. 因此, 当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $f(x)$ 取极小值. 又由于只有一个极小值, 故也是最小值.

这样一来, 当 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=-\frac{\ln 2}{2}$ 时, 曲率半径为最小, 也即曲率为最大. 因此, 所求的点为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$.

【1610】 三次抛物线 $y=\frac{kx^3}{6} (0 \leq x < +\infty, k > 0)$ 的最大曲率等于 $\frac{1}{1000}$, 求达到此最大曲率的点 x .

解 为方便起见, 令 $c=\frac{k}{6}$. 因为 $y'=3cx^2, y''=6cx$, 所以, 曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6cx}{(1+9c^2x^4)^{\frac{3}{2}}} \quad (x \geq 0).$$

由 $\frac{dK}{dx} = 6c \frac{\sqrt{1+9c^2x^4}(1-45c^2x^4)}{(1+9c^2x^4)^3} = 0$, 得 $x_0^4 = \frac{1}{45c^2}$.

可证 $\left. \frac{d^2K}{dx^2} \right|_{x=x_0} < 0$, 又根据条件, $K(x_0)$ 为 $K(x)$ 的最大值, 且有

$$K(x_0) = \frac{6c \sqrt[4]{\frac{1}{45c^2}}}{\left(1+9c^2 \cdot \frac{1}{45c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\sqrt{c} \sqrt[4]{\frac{1}{45}}}{\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{10^3},$$

解之, 得 $c = \frac{18\sqrt{5}}{5^3 \times 10^6}$, 从而,

$$x_0^2 = \frac{1}{\sqrt{45}c} = \frac{5^2 \times 10^6}{54} \quad \text{或} \quad x_0 = \sqrt{\frac{5^2 \times 10^6}{54}} \approx 680,$$

此即达到最大曲率的点.

求下列各曲线的渐屈线方程:

【1611】 抛物线 $y^2=2px$.

解 由于 $y'=\frac{p}{y}, y''=-\frac{p^2}{y^3}$, 故曲率中心坐标为

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{p}{y} \left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}} = x + \frac{y^2 + p^2}{p} = x + \frac{2px + p^2}{p} = 3x + p,$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x = \frac{\xi - p}{3}, \quad y^3 = -p^2 \eta. \quad (1)$$

由于 $y^6 = 8p^3 x^3$, 故将(1)式代入后, 消去 x 及 y , 即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2 = 8(\xi - p)^3.$$

【1612】 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 由于 $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, $y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$, 故曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned}\xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{\frac{b^2 x}{a^2 y} \left(1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}\right)}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = x - \frac{b^2 x a^2 y^3 (a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^6 y^3 b^4} \\ &= x - \frac{x a^2 b^2 \left(a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2\right)}{a^4 b^4} = x - \frac{x \left(a^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2\right)}{a^2} = \frac{c^2}{a^4} x^3, \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}{-\frac{b^4}{a^2 y^3}} = y - \frac{y(a^4 y^2 + b^4 x^2)}{a^2 b^4} = y - \frac{y a^2 b^2 \left(b^2 + \frac{c^2}{b^2} y^2\right)}{a^2 b^4} = -\frac{c^2}{b^4} y^3,\end{aligned}$$

即

$$c^2 y^3 = -b^4 \eta, \quad c^2 x^3 = a^4 \xi.$$

于是,

$$c^{\frac{4}{3}} y^2 = b^{\frac{8}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}, \quad c^{\frac{4}{3}} x^2 = a^{\frac{8}{3}} \xi^{\frac{2}{3}},$$

从而, 将 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$, $\frac{y^2}{b^2} = \frac{b^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}}$ 相加即得渐屈线方程为

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

其中 $c^2 = a^2 - b^2$. 它为一星形线.

【1613】 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

解 由于 $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $y'' = \frac{1}{3} a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$, 故曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned}\xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}} = x + 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{3x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}} = y + 3x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}\xi + \eta &= (x + y) + 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}) [(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}) + 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}] = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3, \\ \xi - \eta &= (x - y) - 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}) = (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}) [(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}) - 3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}] = (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^3,\end{aligned}$$

因此,

$$(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^2 + (x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}})^2 = 2(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) = 2a^{\frac{2}{3}},$$

此即所求的渐屈线方程, 它仍为一星形线.

【1614】 曳物线 $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$.

解 先求 y' 和 y'' . 在等式

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

两端分别对 x 求导, 得

$$1 = a \left(\frac{-1}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} \cdot \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \frac{y'}{y} \right) + \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

化简得

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \quad (1)$$

再将(1)式两端分别对 x 求导并以(1)式代入,化简即得

$$y'' = \frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

于是,曲率中心的坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}} = x + \sqrt{a^2 - y^2}, \\ \eta &= y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{\frac{a^2}{a^2 - y^2}}{\frac{a^2 y}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{a^2}{y}. \end{aligned}$$

由于点 (x, y) 的坐标 x 和 y , 适合方程

$$x + \sqrt{a^2 - y^2} = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

故

$$\xi = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

即

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e^{\frac{\xi}{a}}. \quad (2)$$

将(2)式分子有理化,得

$$\frac{a^2 - (a^2 - y^2)}{y(a + \sqrt{a^2 - y^2})} = e^{-\frac{\xi}{a}},$$

即

$$\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = e^{-\frac{\xi}{a}}. \quad (3)$$

(2)+(3)并除以 2,即得

$$\frac{a}{y} = \operatorname{ch} \frac{\xi}{a},$$

从而得

$$\eta = a \operatorname{ch} \frac{\xi}{a}.$$

此即所要求的渐屈线方程,它为一悬链线.

【1615】 对数螺线 $r = ae^{m\theta}$.

解 利用直角坐标与极坐标的互化公式来求渐屈线方程. 首先,我们有

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + m \arctan \frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{m(xy' - y)}{x^2 + y^2},$$

即

$$x + yy' = m(xy' - y), \quad (1)$$

由(1)式即得

$$y' = \frac{x + my}{mx - y}.$$

由(1)式再对 x 求导, 化简得

$$y'' = \frac{1 + y'^2}{mx - y}.$$

以 y' 及 y'' 代入曲率中心的表达式中, 化简整理得

$$\xi = -my, \quad \eta = mx. \quad (2)$$

设 $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\psi = \arctan \frac{\eta}{\xi}$, 于是, 由(2)式得

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = m^2(x^2 + y^2), \\ -\frac{\xi}{\eta} = \frac{y}{x}. \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

(3) 式即 $\rho = mr = mae^{m\varphi}$, (4) 式即 $-\cot\psi = \tan\varphi$ 或 $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$. 因此, 最后我们得到所求的渐屈线方程为对数螺线

$$\rho = mae^{m(\psi - \frac{\pi}{2})}.$$

【1616】 证明: 摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线, 仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cot \frac{t}{2}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}},$$

于是,

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''} = a(t - \sin t) + \frac{\cot \frac{t}{2} \cdot (1 + \cot^2 \frac{t}{2})}{\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}} = a(t + \sin t),$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = a(\cos t - 1).$$

令 $t - \pi = \tau$, 即得

$$\xi = \pi a + a(\tau - \sin \tau), \quad \eta = -2a + a(1 - \cos \tau),$$

此仍为摆线, 显然, 只是位置与原摆线不同而已.

§ 15. 方程的近似解法

1° 比例法(弦线法) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且

$$f(a)f(b) < 0,$$

而当 $a < x < b$ 时, $f'(x) \neq 0$, 则方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

在区间 (a, b) 内有而且仅有一个实根 ξ . 可取下面的值作为此根的第一个近似值:

$$x_1 = a + \delta_1$$

式中 $\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$.

进而,对区间 (a, x_1) 和 (x_1, b) 中使函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用此方法,得到根 ξ 的第二个近似值 x_2 ,并不断重复此过程.对于第 n 个近似值 x_n ,有以下估计:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad (2)$$

其中 $m = \inf_{a < x < b} |f'(x)|$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

2° 牛顿法(切线法) 若在闭区间 $[a, b]$ 内 $f''(x) \neq 0$, 且 $f(a)f''(a) > 0$, 则可取数值

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根 ξ 的第一个近似值 ξ_1 .

重复利用这个方法,很快就得到趋近于根 ξ 的一系列近似值 $\xi_n (n=1, 2, \dots)$, 这些近似值的精度可根据公式(2)来估计.

为了大致确定方程的根,最好作出函数 $y=f(x)$ 的图像.

利用比例法,求下列方程的根(精确到 0.001):

【1617】 $x^3 - 6x + 2 = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x + 2$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续及 $f(0) = 2$, $f(1) = -3$, 且当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 6 \neq 0$. 因而, 所给方程在 $(0, 1)$ 内有且仅有一实根 ξ_1 . 现求之, 以 x_i 表示此根的第 i 个近似值, 则有

$$x_1 = 0 + \delta_1 = -\frac{f(0)}{f(1) - f(0)}(1 - 0) = 0.4;$$

又因 $f(0.4) = -0.336$, 故

$$x_2 = -\frac{f(0)}{f(0.4) - f(0)}(0.4 - 0) = 0.342;$$

$f(0.342) = -0.012$, 故

$$x_3 = -\frac{f(0)}{f(0.342) - f(0)}(0.342 - 0) = 0.340;$$

由于 $f(0.340) = -0.001$, $m_1 = \inf_{0 < x < 1} |f'(x)| = 3$, 因此, 如果取 0.340 作为此根的第三个近似值, 其误差为

$$|0.340 - \xi_1| \leq \frac{|f(0.340)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 0.340.

再求其他的根:

因为 $f(2) = -2$, $f(3) = 11$, 且当 $2 < x < 3$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故方程在 $(2, 3)$ 内有且仅有一实根 ξ_2 . 与求 ξ_1 的方法类似, 依次求得第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f(3) - f(2)}(3 - 2) = 2.15;$$

$$x_2 = 2.15 - \frac{f(2.15)}{f(3) - f(2.15)}(3 - 2.15) = 2.22;$$

$$x_3 = 2.22 - \frac{f(2.22)}{f(3) - f(2.22)}(3 - 2.22) = 2.245;$$

$$x_4 = 2.245 - \frac{f(2.245)}{f(3) - f(2.245)}(3 - 2.245) = 2.256;$$

$$x_5 = 2.256 - \frac{f(2.256)}{f(3) - f(2.256)}(3 - 2.256) = 2.260;$$

$$x_6 = 2.260 - \frac{f(2.260)}{f(3) - f(2.260)}(3 - 2.260) = 2.261;$$

$$x_7 = 2.261 - \frac{f(2.261)}{f(3) - f(2.261)}(3 - 2.261) = 2.262.$$

由于 $f(2.262) = 0.003$, $m_2 = \inf_{2 < x < 3} |f'(x)| = 6$, 因此, 如果取 2.262 作为 ξ_2 的第七个近似值, 则其误差为

$$|2.262 - \xi_2| \leq \frac{|f(2.262)|}{m_2} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 2.262.

由于此方程为一个三次方程, 最后必然还有一实根.

因为 $f(-2)=6, f(-3)=-7$, 且当 $-3 < x < -2$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故此根 ξ_3 介于 -3 和 -2 之间. 同上的法依次求得第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2) - f(-3)}(-2 + 3) = -2.461;$$

$$x_2 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.461) - f(-3)}(-2.461 + 3) = -2.574;$$

$$x_3 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.574) - f(-3)}(-2.574 + 3) = -2.596;$$

$$x_4 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.596) - f(-3)}(-2.596 + 3) = -2.601;$$

$$x_5 = -3 - \frac{f(-3)}{f(-2.601) - f(-3)}(-2.601 + 3) = -2.602.$$

由于 $f(-2.602) = -0.004, m_3 = \inf_{-3 < x < -2} |f'(x)| = 6$, 因此, 如果取 -2.602 作为 ξ_3 的第五个近似值, 则其误差为

$$|-2.602 - \xi_3| \leq \frac{|f(-2.602)|}{m_3} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的第三个根的近似值为 -2.602 .

【1618】 $x^4 - x - 1 = 0$.

解 设 $f(x) = x^4 - x - 1$. 由于 $f(1) = -1, f(2) = 13$, 且当 $1 < x < 2$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(1, 2)$ 内有且仅有一实根 ξ_1 , 按 1617 题的方法, 依次求得该根的第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 1.07; \quad x_2 = 1.12; \quad x_3 = 1.156; \quad x_4 = 1.180; \quad x_5 = 1.196; \quad x_6 = 1.205; \quad x_7 = 1.217;$$

$$x_8 = 1.220; \quad x_9 = 1.221.$$

由于 $f(1.221) = 0.002, m_1 = \inf_{1 < x < 2} |f'(x)| = 3$, 因此, 如果取 1.221 作为 ξ_1 的第九个近似值, 则其误差为

$$|1.221 - \xi_1| \leq \frac{|f(1.221)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 1.221.

又因 $f(-1) = 1, f(-0.5) = -0.4375$, 且当 $-1 < x < -0.5$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(-1, -0.5)$ 内有且仅有一实根 ξ_2 , 依次求得第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = -0.652; \quad x_2 = -0.789; \quad x_3 = -0.706; \quad x_4 = -0.719; \quad x_5 = -0.723; \quad x_6 = -0.724.$$

由于 $f(-0.724) = -0.001, m_2 = \inf_{-1 < x < -0.5} |f'(x)| = 1$, 因此, 如果取 -0.724 作为 ξ_2 的第六个近似值, 则其误差为

$$|-0.724 - \xi_2| \leq \frac{|f(-0.724)|}{m_2} = 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的另一近似根为 -0.724 .

由于 $f'(x) = 4x^3 - 1 = 0$ 只有一实根, 且 $f''(x) = 12x^2 > 0 (x \neq 0)$, 故所给方程仅有二实根, 其余二根为一对共轭复根.

【1619】 $x - 0.1 \sin x = 2$.

解 设 $f(x) = x - 0.1 \sin x - 2$, 则 $f(2) = -0.091, f(\frac{2\pi}{3}) = 0.0237$, 且当 $2 < x < \frac{2\pi}{3}$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(2, \frac{2\pi}{3})$ 内有且仅有一实根 ξ_1 , 依次求得第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 2.075; \quad x_2 = 2.080; \quad x_3 = 2.083; \quad x_4 = 2.087.$$

由于 $f(2.087)=0.00003$, $m_1 = \inf_{2 < x < \frac{3\pi}{2}} |f'(x)| = 1 - 0.1\cos 2 \approx 0.959$, 因此, 如果取 2.087 作为 ξ_1 的第四个近似值, 则其误差为

$$|2.087 - \xi_1| \leq \frac{|f(2.087)|}{m_1} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的近似根为 2.087(秒).

又方程 $x - 0.1\sin x = 2$ 与方程 $x - 2 = 0.1\sin x$ 等价, 而曲线 $y = x - 2$ 与 $y = 0.1\sin x$ 只有一个交点, 因此, 原方程只有一个实根.

*) 因 $f'(x) = 1 - 0.1\cos x$, $f''(x) = 0.1\sin x > 0$, 故 $m_1 = |f'(2)| = 1 - 0.1\cos 2$. 以下同样情况不再说明.

【1620】 $\cos x = x^2$.

解 设 $f(x) = \cos x - x^2$, 则因 $f(-x) = f(x)$, 故原方程若有一根 ξ , 必有另一根 $-\xi$. 又曲线 $y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 只有两个交点. 因此, 原方程有且仅有两个根 $\pm \xi$. 为此, 只需求一正根即可.

由于 $f(\frac{\pi}{4}) = 0.09$, $f(1) = -0.46$, 且当 $\frac{\pi}{4} < x < 1$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 内有且仅有一实根 ξ , 依次求得其第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 0.821; \quad x_2 = 0.828; \quad x_3 = 0.826; \quad x_4 = 0.825.$$

由于 $f(0.825) = -0.002$, $m = \inf_{\frac{\pi}{4} < x < 1} |f'(x)| = \left| f'(\frac{\pi}{4}) \right| = 2.278$, 因此, 如果取 0.825 作为 ξ 的第四个近似值, 则其误差为

$$|0.825 - \xi| \leq \frac{f(0.825)}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的二近似根为 ± 0.825 .

如果注意到 $f(0.824) = 0.002$, $f(0.825) = -0.002$, 因此, 取 ± 0.824 作为所给方程的二近似根, 也可保证所需的精确度.

利用牛顿法, 求下列方程的根(精确到所指定的精度):

【1621】 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (精确到 10^{-3}).

解 曲线 $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ 与 $y = 10x$ 共有两个交点. 因此, 所给方程共有两个实根.

设 $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 10x$, 则因 $f(0.4) = 2.41$, $f(0.5) = -0.75$, 且当 $0.4 < x < 0.5$ 时, $f'(x) \neq 0$, 故所给方程在 $(0.4, 0.5)$ 内有且仅有一实根. 又由于在 $[0.4, 0.5]$ 内 $f''(x) \neq 0$ 且 $f(0.4)f''(0.4) > 0$, 故利用牛顿法求近似根时, 切点应取 $(0.4, f(0.4))$. 依次求得其第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 0.4 - \frac{f(0.4)}{f'(0.4)} = 0.459;$$

$$x_2 = 0.459 - \frac{f(0.459)}{f'(0.459)} = 0.471;$$

$$x_3 = 0.471 - \frac{f(0.471)}{f'(0.471)} = 0.472.$$

今估计误差: $f(0.472) = -0.013$. 由于 $f'(x)$ 在 $(0.4, 0.5)$ 内为增函数, 且为负的, 故

$$m = \inf_{0.4 < x < 0.5} |f'(x)| = |f'(0.5)| = 25.$$

因此, 如果取 0.472 作为根的近似值, 则其误差为

$$|0.472 - \xi| \leq \frac{f(0.472)}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一近似根为 0.472.

现求第二个近似根, 由于 $f(10)=0.001$, 故此根可能逼近 10. 现分别以 9.9 及 9.99 试之:

$$f(9.9)=-0.98, \quad f(9.99)=-0.09.$$

因此, $f(9.99)f(10)<0$, 加以在 $(9.99, 10)$ 内 $f'(x)\neq 0$, 故所给方程在 $(9.99, 10)$ 内有且仅有一实根. 又因 $f(10)f''(10)>0$ 及 $f''(x)\neq 0$, 故利用牛顿法求近似根时, 切点应选在 $(10, f(10))$ 处. 于是,

$$x_1=10-\frac{f(10)}{f'(10)}=9.99999,$$

如果取 9.999 作为根的近似值, 则其误差显然已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的又一近似根为 9.999.

【1622】 $x\lg x=1$ (精确到 10^{-4}).

解 曲线 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 只有一个交点. 因此, 所给方程只有一个实根. 现确定其范围. 设 $f(x)=x\lg x-1$. 由于 $f(2.506)=-0.0004$, $f(2.507)=0.0005$, 且当 $2.506<x<2.507$ 时, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, 故在 $(2.506, 2.507)$ 内有且仅有一实根, 切点选在 $(2.507, f(2.507))$. 依次求得其第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1=2.5064; \quad x_2=2.5062.$$

由于

$$f(2.5062)=0.00002, \quad m=\inf_{2.506<x<2.507} |f'(x)|=|f'(2.506)|=0.84,$$

因此, 如果取 2.5062 作为根的近似值时, 则其误差为

$$|2.5062-\xi|\leq \frac{|f(2.5062)|}{m}<0.0001,$$

已达到所需的精确度, 故所求的唯一近似根为 2.5062.

【1623】 $\cos x \operatorname{ch} x=1$ (精确到 10^{-4}) (二正根).

解 曲线 $y=\cos x$ 与 $y=\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ 的交点有无穷多个, 其中最小的三个正根分别记为 α, β, γ . 且

$$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi, \quad 2\pi<\beta<\frac{5\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{2}<\gamma<4\pi.$$

现在我们将求 α 与 γ 两正根的计算方法叙述如下. 设 $f(x)=\cos x \operatorname{ch} x-1$.

(1) 先求 α .

由于 $f(4.7)=-1.6812$, $f(4.8)=4.3159$, 故知 $4.7<\alpha<4.8$. 又因在 $(4.7, 4.8)$ 内 $f''(x)>0$, 故切点应取在 $(4.8, f(4.8))$ 处, 依次求得 α 的第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1=4.7345; \quad x_2=4.7301.$$

本题若采用 $\frac{|f(x_i)|}{m}$ 估计误差, 由于 m 本身也需估计, 而且繁琐, 今用比例法与牛顿法联合使用求根的近似值. 设以右上角带“'”的 x'_i 表示用比例法求出的第 i 个近似值, 则有

$$x'_1=4.7-\frac{f(4.7)}{f(4.8)-f(4.7)}(4.8-4.7)=4.7280.$$

从而知

$$4.7280<\alpha<4.7345.$$

于是,

$$x'_2=4.7280-\frac{f(4.7280)}{f(4.7345)-f(4.7280)}(4.7345-4.7280)=4.7300.$$

因此,

$$4.7300<\alpha<4.7301.$$

取 4.730 作为 α 的近似值, 即可保证所需的精确度. 于是, 所给方程的一正根的近似值为 4.730.

(2) 再求 γ .

由于 $f(\frac{7\pi}{2})=-1$, $f(11)\approx 133$, 故知 $\frac{7\pi}{2}<\gamma<11$. 切点取在 $(11, f(11))$ 处. 分别用比例法及牛顿法求得

$$x'_1=10.9956, \quad x_1=10.9956.$$

因而取 10.996 作为 γ 的近似值, 即可保证所需的精确度. 于是, 所给方程的又一正根的近似值为 10.996.

【1624】 $x + e^x = 0$ (精确到 10^{-5}).

解 设 $f(x) = x + e^x$, 则 $f'(x) = 1 + e^x > 0$, $f''(x) = e^x > 0$. 由于 $f(0) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$, 故在 $(-1, 0)$ 内所给方程有且仅有一实根, 切点选在 $(0, f(0))$ 处. 依次求得此根的第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = -0.5; \quad x_2 = -0.56631; \quad x_3 = -0.567132; \quad x_4 = -0.567145.$$

由于

$$|x_4 - \xi| \leq \frac{|f(-0.567145)|}{m} = \frac{|f(-0.567145)|}{1 + e^{-1}} < 10^{-5},$$

故取 -0.56715 作为根的近似值, 即可保证所需的精确度.

由于曲线 $y = e^x$ 与 $y = -x$ 只有一个交点, 故上述近似根 -0.56715 即为所给方程的唯一近似根.

【1625】 $x \operatorname{th} x = 1$ (精确到 10^{-6}).

解 设 $f(x) = \operatorname{th} x - \frac{1}{x}$, 则因曲线 $y = \operatorname{th} x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 仅有两个交点, 故所给方程仅有二实根. 又因在 $x \operatorname{th} x$ 中以 $-x$ 代 x , 其值不变, 故方程的二实根为 $\pm \xi$.

由 $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{x^2} > 0$, 知 $f(x)$ 是增函数. 又因 $f(1) = -0.2384$, $f(2) = 0.4640$, 故所给方程在 $(1, 2)$ 内有且仅有一实根. 又

$$f''(x) = -\frac{2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} - \frac{2}{x^3} < 0 \quad (x > 0),$$

因此, 切点应选为 $(1, f(1))$. 仍以 x'_i 及 x_i 分别表示用比例法及牛顿法求得的根的第 i 次近似值, 重复使用, 即得

$$x'_1 = 1.339, \quad x_1 = 1.168,$$

故 $1.168 < \xi < 1.339$.

$$x'_2 = 1.2032, \quad x_2 = 1.1989,$$

有 $1.1989 < \xi < 1.2032$.

$$x'_3 = 1.1996796, \quad x_3 = 1.1996781,$$

故 $1.1996781 < \xi < 1.1996796$.

于是, 取 ± 1.199678 作为根的近似值, 即可保证所需的精确度.

【1626】 求方程 $\tan x = x$ 最小的三个正根 (精确到 0.001).

解 由 $y = \tan x$ 及 $y = x$ 的图像知方程有正根, 且有无穷个, 只求其最小三正根, 设 $f(x) = \tan x - x$.

(1) 由于 $f'(x) = \tan^2 x > 0$, $f''(x) = 2 \tan x \sec^2 x > 0$ ($x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$) 及 $f(\frac{4\pi}{3}) f(\frac{23\pi}{16}) < 0$, 故在 $(\frac{4\pi}{3}, \frac{23\pi}{16})$ 内所给方程有且仅有一实根 ξ_1 , 切点应选在 $(\frac{23\pi}{16}, f(\frac{23\pi}{16}))$ 处. 依次求得 ξ_1 的第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 4.4959; \quad x_2 = 4.4933.$$

由于 $|f(4.4933)| = 0.0012$, $m = \inf_{\frac{4\pi}{3} < x < \frac{23\pi}{16}} |f'(x)| = \tan^2 \frac{4\pi}{3} = 3$, 因此, 如果取 4.493 作为根 ξ_1 的近似值, 则其误差为

$$|x_2 - \xi_1| \leq \frac{|f(4.4933)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的一最小正近似根为 4.493.

(2) 再求第二个最小正根.

由于 $f(\frac{23\pi}{16}) < 0$, $f(\frac{79\pi}{32}) > 0$, 故在 $(\frac{23\pi}{16}, \frac{79\pi}{32})$ 内方程有且仅有一实根 ξ_2 . 又因在此区间内 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 故切点应选在 $(\frac{79\pi}{32}, f(\frac{79\pi}{32}))$ 处. 依次求得 ξ_2 的第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 7.7325; \quad x_2 = 7.7258; \quad x_3 = 7.7254,$$

由于 $|f(7.7254)| = 0.0083$, $m = \inf_{\frac{39\pi}{16} < x < \frac{79\pi}{32}} |f'(x)| = \tan^2 \frac{39\pi}{16} > 25$, 因此, 如果取 7.725 作为 ξ_2 的近似值, 则其误差为

$$|x_3 - \xi_2| \leq \frac{|f(7.7254)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的第二个最小正根的近似值为 7.725.

(3) 最后求第三个最小正根.

由于 $f(\frac{111\pi}{32}) < 0$, $f(\frac{223\pi}{64}) > 0$, 故在 $(\frac{111\pi}{32}, \frac{223\pi}{64})$ 内方程有且仅有一实根 ξ_3 . 又因在此区间内 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 故切点应选在 $(\frac{223\pi}{64}, f(\frac{223\pi}{64}))$ 处. 依次求得 ξ_3 的第 i 个近似值 x_i 为:

$$x_1 = 10.9233; \quad x_2 = 10.9086; \quad x_3 = 10.9041.$$

由于 $|f(10.9041)| = 0.014$, $m = \tan^2 \frac{111\pi}{32} = 102.78$. 因此, 如果取 10.904 作为 ξ_3 的近似值, 则其误差为

$$|x_3 - \xi_3| \leq \frac{|f(10.9041)|}{m} < 0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是, 所给方程的第三个最小正根的近似值为 10.904.

【1627】 求方程 $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的二正根(精确到 10^{-3}).

解 由 $y = \cot x$ 与 $y = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$ 的图像知交点有无穷个, 我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2 :

$$\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \pi, \quad \frac{3\pi}{2} < \xi_2 < 2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1 .

设 $f(x) = \cot x - \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$, 则在所考虑的区间内

$$f'(x) = -\cot^2 x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} < 0, \quad f''(x) = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{x^3} < 0.$$

又因 $f(2.0708) = 0.0062$, $f(2.1708) = -0.0593$, 故切点应选在 $(2.1708, f(2.1708))$ 处. 用比例法与牛顿法联合求 ξ_1 . 重复应用, 即得

$$x'_1 = 2.0803, \quad x_1 = 2.0923,$$

故 $2.0803 < \xi_1 < 2.0923$.

$$x'_2 = 2.0815, \quad x_2 = 2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值, 即可保证所需的精确度. 于是, 所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2 .

由于 $f(5.9324) = 0.0648$, $f(5.9424) = -0.0169$, 故

$$5.9324 < \xi_2 < 5.9424,$$

切点取 $(5.9424, f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次, 即得

$$x'_1 = 5.9403, \quad x_1 = 5.9404,$$

因此, 取 5.940 作为 ξ_2 的近似值, 即可保证所需的精确度. 于是, 所给方程的又一正根的近似值为 5.940.